

4to Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2014

Primera Etapa

Sábado 24 de mayo de 2014

Bienvenido a la Primera Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether



- Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada respuesta correcta vale un punto.
- Tienes 3 horas para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.

1. La parábola $y = 16 - x^2$ toca a los ejes del plano cartesiano en los puntos A , B y C . ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?
(a) 32 (b) 64 (c) 128 (d) 196
2. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ satisface que $P'(\frac{1}{2}) = -\frac{21}{4}$. ¿Cuál es el valor de $\frac{P(1)+P'''(0)}{2}$?
(a) No se puede determinar (b) -2 (c) 1 (d) $\frac{5}{4}$
3. Si a es un entero mayor que 1, ¿cuál de las siguientes expresiones es mayor?
(a) $a + 1$ (b) $(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2})^{-1}$ (c) $(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2})^{-1}$ (d) $a - 1$
4. ¿Cuál es el determinante de la siguiente matriz?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

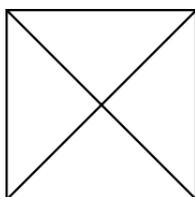
14. Considera el espacio vectorial de las sucesiones reales, en donde cada elemento es de la forma (a_1, a_2, a_3, \dots) . Sean T y T^* las transformaciones dadas por:

$$T(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

$$T^*(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

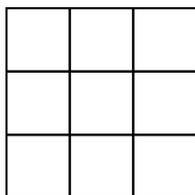
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

- (a) $T^* \circ T = \text{Id}$ (b) T es lineal (c) T^* es lineal (d) $T \circ T^* = \text{Id}$
15. Vamos a quitar una cantidad finita de puntos de la siguiente figura. ¿Cuál es el máximo de puntos que se pueden quitar de modo que siga siendo conexa.



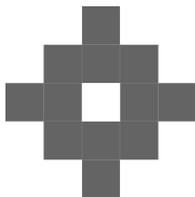
- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6
16. ¿Cuál es el número de soluciones a $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x-4} + \frac{5}{x-5} = 2$?
- (a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

17. Considera el siguiente tablero de 3×3 . Una ficha comienza en el centro del tablero. En cada *paso* la ficha puede moverse a una casilla adyacente (que comparta un lado). Queremos regresar al centro en exactamente 6 movimientos. Podemos repetir casillas, pero no podemos llegar antes de los 6 movimientos al centro. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?



- (a) 32 (b) 48 (c) 64 (d) 96
18. ¿Cuál de los siguientes números es más grande?
- (a) $\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{3} \sin \frac{1}{4}$ (b) $\sin \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3} \sin \frac{1}{4}$ (c) $\cos \frac{1}{2} \cos \frac{1}{3} \cos \frac{1}{4}$ (d) $\cos \frac{1}{2} \sin \frac{1}{3} \cos \frac{1}{4}$

19. ¿Cuánto es la suma de los dígitos de 101^8 ?
 (a) 2^4 (b) 37 (c) 67 (d) 2^8
20. La matriz A es de 2×2 y tiene entradas reales. Cumple que $A^2 = I$ y que $\text{traza}(A) = 0$. ¿Quiénes son sus valores propios?
 (a) No se puede determinar (b) 1 y 0 (c) -1 y 1 (d) -1 y 0
21. Se tiene un círculo C de perímetro 6 y uno D de perímetro 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de perímetro de C que puede quedar dentro de D ?
 (a) 2 (b) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (d) 1
22. ¿Cuál es el menor valor de k tal que la siguiente figura se puede poner como la unión de k conjuntos convexos? Recuerda que un conjunto X es convexo si para cualesquiera dos puntos A y B de X el segmento AB se queda contenido en X



- (a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9
23. Tomemos la función $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. Denotamos por $f^{(7)}$ a su séptima derivada. ¿Cuánto es $f^{(7)}(0)$?
 (a) 7 (b) 21 (c) 35 (d) 43
24. Se define una sucesión como sigue: $a_0 = a_1 = 1$ y a_{n+2} es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a_n y a_{n-1} . Encuentra el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2^{n/2}}.$$

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) ∞
25. El volumen de un icosaedro de radio 1 es $\frac{80\sqrt{3}}{(3+\sqrt{5})^2}$. ¿Cuál es su área? El radio de un icosaedro es la distancia del centro del vértice al centro de una cara.
 (a) $\frac{80\sqrt{3}}{(3-\sqrt{5})^2}$ (b) $\frac{160\sqrt{3}}{(3+\sqrt{5})^2}$ (c) $\frac{240\sqrt{3}}{(3-\sqrt{5})^2}$ (d) $\frac{240\sqrt{3}}{(3+\sqrt{5})^2}$