3er Concurso Unversitario de Matemáticas Galois-Noether 2013
Primera Etapa

Sábado 25 de mayo de 2013

Bienvenido a la Primera Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether

- **Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada repuesta correcta vale un punto.**
- **Tienes 2 horas y media para resolver el examen.**
- **Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.**

1. Considera todos los números $a_{ij} = j - i$ con $0 \leq i < j \leq 5$. ¿Cuánto suman estos números?

   (a) 15 (b) 25 (c) 35 (d) 45

2. ¿De cuántas formas podemos tomar tres números distintos entre 1 y 9 de modo que su suma sea un múltiplo de 3?

   (a) 27 (b) 30 (c) 54 (d) 108

3. Los reales x y y satisfacen $1 + xy = x + y$. Entonces $1 + (xy)^n$ siempre es igual a:

   (a) $x^n + y^n$ (b) $(x + y)^n$ (c) $1 + (x + y)^n$ (d) $x + y$

4. Sea $n = k^2$ con k un entero. El determinante de la siguiente matriz siempre es:

$$\begin{pmatrix} n & 4 & n \\ 2 & n & 4 \\ n & 2 & n \end{pmatrix}$$

   (a) múltiplo de 3 (b) múltiplo de 8 (c) positivo (d) un cuadrado perfecto

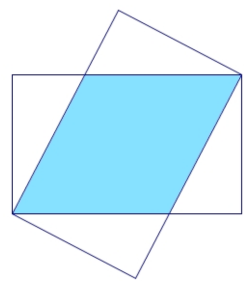
5. Se tienen tres números primos p, q y r tales que su suma es par. Encuentra el valor de $pqr - 2(pq + qr + rp) + 4(p + q + r)$.

   (a) 8 (b) 4 (c) 2 (d) Depende de los primos

6. Determina mayor entero m para el cual $\left\lfloor \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{m}}} \right\rfloor = 2$. Recuerda que $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual a x.

   (a) 22 (b) 23 (c) $22 \cdot 24$ (d) 529

7. En la siguiente figura se enciman dos rectángulos de lados 3 y 4. Determina el área sombreada.



   (a) $\frac{21}{8}$ (b) $\frac{25}{8}$ (c) $\frac{63}{8}$ (d) $\frac{75}{8}$

8. Si $x + y$ y xy son números racionales, ¿cuál de los siguientes números puedes asegurar que es racional?

   (a) $x^2 + y^2$ (b) x (c) $x - y$ (d) $x^2 - y^2$

9. ¿Para qué valor positivo de t se alcanza el máximo de la expresión $\int_0^t (4 + 4x - x^2 - x^3)^{2013}\, dx$?

   (a) 1 (b) 2 (c) 2013 (d) 2014

10. Para un grupo conmutativo G y un subconjunto A de elementos de G, se define $G_A = \{g \in G : \{a + g : a \in A\} = A\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no necesariamente es cierta?

    (a) G_A es un subgrupo de G (b) A es unión de clases laterales de G_A
    (c) $G_{G_A + A} = G_A$ (d) $G_{A \cup B} = G_A \cup G_B$

11. ¿Cuál es la mínima cantidad de reales que necesitas para que, sabiendo que su suma es 50, puedas deducir que hay alguno menor o igual a 6?

    (a) 1 (b) 9 (c) 17 (d) 25

12. En cada lado de un triángulo equilátero de lado 2 se trazan cuadrados externamente. ¿Cuál es el radio de la circunferencia más pequeña que contiene a esta figura?

(a) $2\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (b) $2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}}$ (c) $2\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ (d) $2\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}}$

13. Determina los enteros positivos n para los cuales n^2+1 divide a n^2+5n+2. Suma todos estos enteros. ¿Cuánto obtienes?

(a) 1 (b) 6 (c) 10 (d) 15

14. La sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión aritmética. La sucesión $\{y_n\}$ es una sucesión geométrica. Si sabemos que $x_1+y_1=28$, $x_2+y_2=13$, $x_3+y_3=10$ y $x_4+y_4=11$, ¿cuál es el valor de $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{n}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 3 (d) ∞

15. En el siguiente tablero realizaremos operaciones y siempre simplificamos módulo 5. Se permite elegir dos casillas que compartan un lado y sumarles o restarles un mismo número. ¿Por cuántos tableros distintos podemos pasar?

0	0
0	0

(a) 20 (b) 25 (c) 125 (d) 625

16. Un rectángulo de 5×13 está dividido en cuadritos unitarios. Se traza una diagonal y se quitan los cuadritos que tocan esta diagonal ¿Cuántos cuadritos quedan?

(a) 17 (b) 19 (c) 46 (d) 48

17. El número N está formado con los números del 1 al 1000 así: $N=1234567891011\ldots1000$. ¿Cuál es el residuo de dividir N entre 9?

(a) 1 (b) 4 (c) 7 (d) 0

18. Los números complejos a, b, c y d son distintos y satisfacen la ecuación $x^3+x^5=1+x^8$. Entonces siempre alguno de ellos satisface:

(a) $x^2=x$ (b) $x^5=x^2$ (c) $x^6+x^7=x+x^2$ (d) $x^4+x^2+1=0$

19. Una hormiga quiere recorrer todas las casillas de un tablero de 3×3 una y sólo una vez. Puede ir de una casilla a otra si comparten un lado. ¿De cuántas formas puede hacer su recorrido? La dirección del recorrido es importante.

(a) 32 (b) 36 (c) 40 (d) 44

20. Evalúa la 2013−ésima derivada de $f(x) = \frac{x+4}{x+5}$ en $x = 2008$.

(a) $\frac{2012!}{2013^{2014}}$ (b) $-\frac{2013!}{2013^{2014}}$ (c) $\frac{2013!}{2013^{2014}}$ (d) $-\frac{2012!}{2013^{2014}}$

21. El triángulo $A_1A_2A_3$ tiene lados $A_1A_2 = \sqrt{2}$, $A_1A_3 = A_2A_3 = 1$. Definimos recursivamente para $n \geq 3$ al punto A_n como el pie de la perpendicular de A_{n-1} en la recta por A_{n-2} y A_{n-3}. Determina la longitud de la poligonal infinita $A_1A_2A_3A_4 \ldots$.

(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ (b) 2 (c) $2+\sqrt{2}$ (d) $2+2\sqrt{2}$

22. ¿De cuántas formas se puede poner a 2013 como suma de dos o más enteros positivos consecutivos?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

23. Sea k un entero positivo. En cada casilla de un tablero de $2 \times (2k+1)$ hay una ficha. Si pagas un peso puedes quitar una ficha. Si pagas tres pesos, puedes quitar una ficha y las que estén en casillas que compartan un lado. ¿Cuánto es lo mínimo que tienes que pagar para quitar todas las fichas?

(a) $2k+3$ (b) $3k+2$ (c) $3k+3$ (d) $4k+2$

24. Para $j = 1, 2, \ldots, 2013$, definimos r_j y s_j como las raíces de $x^2 - 2x + j(j+1)$. Determina el valor de la suma $\sum_{j=1}^{2013} \frac{1}{r_j} + \frac{1}{s_j}$.

(a) $\frac{2013}{1007}$ (b) $1 - \frac{1}{2014}$ (c) $\frac{4028}{2013}$ (d) $2 \cdot \frac{2012}{2013}$

25. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ para algunos enteros $a \neq 0$, b y c. Si sabemos que $f(f(1)) = f(f(2)) = f(f(3))$ entonces $c - 2$ siempre es:

(a) positivo (b) múltiplo de 3 (c) múltiplo de 5 (d) múltiplo de 7