

Entrenamiento Concurso Galois-Noether

Lista 5

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

1. Escribir soluciones

Toma en cuenta los siguientes consejos para redactar la solución para un problema de concurso:

- Escribe ordenadamente y claramente. Finalmente, una demostración es un ensayo y en primer lugar necesitas que se entienda. Cuida aspectos tan sencillos como tu caligrafía y ortografía en la medida de lo posible.
- Las indicaciones “encuentra”, “determina”, “enseña” y otras parecidas necesitan una prueba de que el ejemplo que propones funciona.
- Primero resuelve el problema y luego escribe la demostración. Esto te permitirá, al inicio de la demostración, dar un esbozo del plan que vas a seguir de modo que se entienda perfectamente qué estás haciendo. Si vas a usar contradicción, enúncialo, si haces un análisis de casos, detalla cuál va a ser antes de empezar, si vas a usar figuras, aconseja que se vea la figura.
- Enumera tus ecuaciones y tus figuras y asegúrate de hacer referencia a ellas de manera correcta.
- Documenta cualquier avance que consideres significativo en el problema. En los concursos es importantísimo tener crédito parcial, el cuál sólo se puede obtener si escribes tus ideas.
- Cita lo mejor que puedas los resultados conocidos que uses.
- Cuando uses términos que podrían no ser conocidos, asegúrate de plantear tu definición y usarla consistentemente a lo largo de la prueba.
- Los calificadores no pueden leer la mente. Detalla los pasos que podrían ser más difíciles de seguir.
- Usa lemas. Un lema es un resultado intermedio importante o de uso frecuente. Poner los lemas al inicio de la demostración aumenta enormemente la legibilidad de tu demostración. Sin embargo, no abuses del uso de lemas.
- Acostúmbrate al uso matemático de las expresiones “sin pérdida de generalidad”, “por simetría”, “de manera análoga”, “es sencillo de verificar que”. Te pueden ahorrar tiempo, pero no abuses de ellas como justificación para probar algo que no sabes.
- Si tienes tiempo, vuelve a leer tu demostración y verifica que está correctamente redactada y que no hay errores matemáticos o de cuentas.

1.1. Problemas de Calentamiento

1. Escribe la demostración de que existe una infinidad de primos.
2. Escribe la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional.
3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y escribe la solución al problema.

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\3x + 6y + 9z &= 18 \\x - y + z &= 1\end{aligned}$$

4. A un tablero de ajedrez se le han quitado dos esquinas opuestas. Muestra que no es posible cubrirlo con 31 fichas de dominó de modo que cada ficha cubra dos cuadrados. Resuelve este problema y escribe su solución.

1.2. Problemas

Resuelve los siguientes problemas y escribe sus soluciones

1. En una caja hay pelotas blancas y negras. El 48 % de las pelotas son blancas. Al meter 5 pelotas negras y 20 blancas, ahora el 36 % son negras. ¿Cuántas pelotas blancas eran originalmente?
2. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la desigualdad $|x| + |y| < 100$?
3. El entero positivo n y el primo p cumplen $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 83p$. Encuentra la razón $\frac{n}{p}$.
4. Encuentra el residuo de dividir $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100!$ entre 7.
5. Se tienen algunos enteros que suman 100. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener su producto?
6. Se tienen 10 puntos rojos y 10 puntos azules en el plano. Muestra que existe una recta que deja de cada lado 5 puntos rojos y 5 puntos azules.
7. Muestra que si tienes 18 números consecutivos de tres dígitos, hay uno que es divisible entre la suma de sus dígitos.

1.3. Tarea

1. Lee los problemas de la segunda etapa del concurso anterior. Inténtalos un poco. Después de eso, lee con calma las soluciones y encuentra qué encuentras de favorable (y de desfavorable) en la redacción de las soluciones. Ya que hayas entendido cómo se resuelve el problema, redacta tú mismo las soluciones sin verlas.
2. Entra a la página <http://a-la-imo.blogspot.mx/>. En esta página se entrena para la Olimpiada de Matemáticas. Es un blog en el cual los alumnos ponen sus soluciones en los comentarios. Lee algunos problemas, inténtalos y posteriormente lee las soluciones. Identifica los aspectos buenos y malos y luego redacta tus propias soluciones.
3. Busca demostraciones del teorema del valor intermedio, del teorema de Pitágoras, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, del teorema de Euler, del proceso de Gauss-Jordan, de la innumerabilidad de los reales y otras. Desglósalas poco a poco para entender las ideas que están detrás. Rescríbelas con tus propias palabras.
4. **Problema de exploración** Ponte en contacto con otra persona que esté participando en el Galois-Noether. Escriban soluciones para problemas y asegúrense que la otra persona las puede entender. Crítiquen constructivamente sus soluciones mutuamente.