Entrenamiento Concurso Galois-Noether
Lista 4

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

1. Inducción y casillas

Principio de Inducción El principio de inducción dice que para probar un resultado para todos los números naturales, basta probarlo para el 1 y probar que cada que se cumple para n, entonces se cumple para $n+1$.

Principio de las Casillas El principio de las casillas es uno de los principios más simples y poderosos en las matemáticas. Dice que si tenemos $n+1$ objetos y los colocamos en n casillas, entonces hay una casilla con al menos dos objetos.

1.1. Problemas de Calentamiento

1. Encuentra y prueba una fórmula para cada una de las siguientes expresiones:

   - $1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n$
   - $1-3+5-7+\ldots+(4n-3)-(4n-1)$
   - $3+7+11+\ldots+(4n-1)$
   - $1+5+9+\ldots+(4n+1)$
   - $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

2. Muestra que $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. Supongamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ para cualesquiera reales x y y. Muestra que $f(1)=0$ y que $f(u^n)=nu^{n-1}f(u)$ para todos los enteros n y reales u.

4. ¿Cuántos calcetinas necesitas sacar en la oscuridad de un cajón que tiene 300 blancos y 300 negros para garantizar que tienes 2 iguales? ¿Qué tal para tener dos distintos? ¿Para tener 2 negros? ¿Para tener todos los negros?

5. Muestra que en una fiesta siempre hay dos personas que conocen al mismo número de personas dentro de la fiesta (si A conoce a B, entonces B conoce a A).

6. Muestra que si tenemos 5 puntos el el plano que tienen coordenadas enteras, entonces hay dos de esos puntos cuyo punto medio también tiene coordenadas enteras.

1.2. Problemas

1. Los números de Fibonacci están definidos por $F_1=F_2=1$ y $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ para $n\geq 0$.

   - Encuentra el valor de $F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}$.
   - Expresa la suma $F_1+F_2+\ldots+F_n$ en términos de un número de Fibonacci.

2. Muestra que $5^n + 5 < 5^{n+1}$ para todo entero positivo n.

3. Se traza una cantidad finita de lineas en el plano. Estas dividen al plano en regiones. Muestra que estas regiones se pueden colorear con rojo y azul de modo que no haya dos regiones del mismo color que compartan la orilla.

4. Un triminó es una figura formada por tres cuadrados de lado 1 adyacentes que forman una L. Muestra que un tablero de $2^n \times 2^n$ al que se le ha quitado una casilla puede ser cubierto con triminós.

5. Sean a, b, c y d enteros. Muestra que 12 divide al producto $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

6. En un cuadrado de lado 4 se encuentran 9 puntos. Muestra que hay tres de ellos que determinan un triángulo de área menor o igual que 2.

7. Muestra que para cualquier entero n, siempre existe un múltiplo de n que tiene sólo a los dígitos 0 y 1.

8. Un ajedrecista tiene 77 días para prepararse para un torneo. Quiere jugar al menos un juego por día, pero no más de 132 juegos. Muestra que existen algunos días consecutivos en los cuales juega exactamente 21 juegos.

1.3. Tarea

1. *El juego de Diciembre* Dos jugadores juegan alternadamente lo siguiente. El primero dice 1 de enero. En cada turno, un jugador puede aumentar el día o el mes, pero no ambos, y tiene que decir una fecha válida. Gana el jugador que diga 31 de diciembre. Muestra que el segundo jugador siempre puede jugar de manera que gane.

   Sugerencia Prueba algo un poco más fuerte usando inducción.

2. Para cada entero $n \geq 3$, muestra que existe a y enteros positivos a_1, a_2, $\ldots$, a_n tales que:

$$a^3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$$

3. Muestra que para cualesquiera 51 números entre 1 y 100 hay uno que divide a otro.

4. Considera todos los puntos de coordenadas enteras en el plano. Cada uno se va a pintar con alguno de quince colores. Muestra que tras pintarlos, puedes elegir cuatro de ellos que formen un rectángulo y que sean del mismo color.

5. **Problema de exploración** En esta ocasión veremos que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ es un número irracional.

   a) Demuestra que si x es un real que cumple la desigualdad $0 < x < 1$ entonces $1+x+x^2+x^3+\ldots = \frac{1}{1-x}$.

   b) Demuestra que e no es entero probando que $2 < e < 3$.

   c) Supongamos, con el fin de encontrar una contradicción, que $e = \frac{p}{q}$ con p y $q \geq 2$ enteros. Entonces, $q!e$ es entero. Muestra que entonces $A = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$ tiene que ser entero.

   d) Acota a A por arriba con una suma parecida a la del primer inciso. Precisamente, demuestra que $A < \frac{1}{q}$.

   e) Observa que $0 < A < 1$ ¿Dónde está la contradicción?

   f) Concluye que e es irracional.