

2° Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2012

Segunda Etapa: Examen de Prueba

Sábado 4 de agosto 2012

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether. Este es un examen de práctica.



• Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.

- Tienes 4 horas y media para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.

1. (10 puntos) Se quiere pintar cada uno de los enteros en $\{1, 2, \dots, 2012\}$ con verde, rojo o azul de modo que no haya dos enteros consecutivos pintados con el mismo color. ¿De cuántas formas se puede hacer eso?
2. (10 puntos) Encuentra un polinomio p con coeficientes enteros de modo que $p(n) + 4^n$ sea divisible entre 27 para cualquier entero positivo n .
3. (10 puntos) Muestra que existe un real α tal que para cualquier triángulo ABC se satisface la desigualdad

$$\max(h_A, h_B, h_C) \leq \alpha \cdot \min(m_A, m_B, m_C),$$

en donde h_A, h_B, h_C son las medidas de las alturas y m_A, m_B, m_C son las medidas de las medianas. Encuentra también el menor valor posible para α .

4. (10 puntos) Sea p un real en el intervalo $(0, 1)$. Supongamos que una sucesión x_n satisface $x_{n+1} \leq px_n + (1-p)x_{n-1}$. Muestra que la sucesión converge a un real o a $-\infty$.

5. (10 puntos) Sean a, b, c y d números reales distintos que satisfacen las ecuaciones

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}, b = \sqrt{45 - \sqrt{21 - b}}, c = \sqrt{45 - \sqrt{21 - c}}, d = \sqrt{45 - \sqrt{21 - d}}$$

Muestra que $abcd = 2004$.

6. (10 puntos) Encuentra la máxima dimensión posible de un subespacio V de las matrices reales de $n \times n$ tal que para cualesquiera $A, B \in V$ se cumple que $\text{traza}(AB) = 0$.