2° Concurso Unversitario de Matemáticas Galois-Noether 2012
Segunda Etapa

Sábado 11 de agosto 2012

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether.

- **Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.**
- **Tienes** 4 **horas y media para resolver el examen.**
- **Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.**

1. (10 puntos) Muestra que en la sucesión aritmética con término inicial 1 y diferencia 7 hay infinitas potencias de 10.

2. (10 puntos) Sean x y y reales con $0 < x < 2y < 4x$. Demuestra que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-y)^{2n}}{x^n y^n} = 0.$$

3. (10 puntos) La operación binaria $\star$ en el conjunto S satisface que:
   - Existe $e \in S$ tal que para todo $a \in S$, $e \star a = e = a \star e$, y
   - si para $a, b, x, y \in S$ se cumple que $a \star b = x \star y$, entonces $a \star x = b \star y$.

   Muestra que $\star$ es asociativa, es decir, que para cualesquiera $a, b, c \in S$ se cumple que $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

4. (10 puntos) Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ estrictamente crecientes que satisfacen que los únicos enteros positivos que no están en su imagen son los de la forma $f(n) + f(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

5. (10 puntos) Sea ABC un triángulo y M, N los puntos medios de BC, AC, respectivamente. Se sabe que el ortocentro de ABC y el gravicentro de AMN coinciden. Encuentra los ángulos del triángulo ABC.

6. (10 puntos) Tenemos 2012 personas, $P_1, P_2, \ldots, P_{2012}$ que quieren entrar a un avión con 2012 asientos. La persona P_i tiene que sentarse en el asiento i. Van a entrar al avión una por una en orden.

   Desafortunadamente, P_1 olvidó en qué asiento va, por lo que la aerolínea decide arreglar el problema de la siguiente forma. Le asignará un asiento al azar a P_1. Después, dejará pasar a las siguientes personas en orden, una por una. Si la persona encuentra su asiento disponible, se sienta ahí. Si no, se le asigna aleatoriamente uno de los asientos disponibles.

   Al final entra P_{2012}. ¿Cuál es la probabilidad de que se siente en el asiento 2012?

Soluciones

1. Veremos que para todo entero n, el número 10^{6n} está en dicha sucesión aritmética, es decir, que $10^{6n}-1$ es múltiplo de 7.

   Para esto, observemos que

   $$10^{6n}-1=(10^6-1)(10^{6(n-1)}+10^{6(n-2)}+\ldots+10^6+1)=999999k$$

   para k un entero. Entonces, $10^{6n}-1$ es múltiplo de $999999=142857\cdot 7$ y por tanto es múltiplo de 7. $\square$

2. Por cálculo, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a^n=0$ si y sólo si $|a|<1$. El límite que tenemos es de esta forma, para $a=\frac{(x-y)^2}{xy}$. Como x y y son positivos, basta probar que $\frac{(x-y)^2}{xy}<1$.

   De aquí hay varias formas de terminar. Veremos una que usa teoremas básicos de cálculo. Tras manipulaciones algrebráicas estándar, esto es equivalente a que $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}<3$. Por las hipótesis del problema, tenemos $\frac{1}{2}<\frac{x}{y}<2$. Así, basta ver que $f(r)=r+\frac{1}{r}$ es menor a 3 en $[\frac{1}{2},2]$.

   Esta es una función diferenciable en un cerrado, de modo que sus puntos críticos están en los extremos de la función o cuando la derivada se anula. La derivada $f'(r)=1-\frac{1}{r^2}$ se anula en $r=1$. Tenemos $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(2)=\frac{5}{2}$. Así, el máximo es $\frac{5}{2}<3$ y por tanto tenemos lo que queremos. $\square$

3. Tomemos $a,b,c\in S$ arbitrarios. Simplificaremos la notación a $ab=a\star b$.

   - Como $bc=e(bc)$, entonces $be=c(bc)$ y así $b=be=c(bc)$.
   - Como $(ab)e=ab$, entonces $(ab)a=eb=b$.
   - Estas dos afirmaciones nos permiten concluir $(ab)a=b=c(bc)$, de modo que $(ab)a=c(bc)$. Usando de nuevo la hipótesis, $(ab)c=a(bc)$, como queríamos.

   $\square$

4. Veremos que sólo existe una función así y es la función creciente que se salta justo los múltiplos de 3, es decir, la función dada por:

   $$f(2k-1)=3k-2 \quad (1)$$
   $$f(2k)=3k-1. \quad (2)$$

   Debemos probar que en efecto esa función cumple las condiciones y que es la única que las cumple.

   Para la primer parte, notemos que en efecto es una función creciente. Por otro lado, como la función deja alternadamente los residuos 1 y 2 módulo 3, entonces la suma de dos valores consecutivos siempre es mútiplo de 3 (y se alcanzan todos los múltiplos de 3) y en efecto, en la imagen de f no hay múltiplos de 3 (y son los únicos valores que no están).

Pasaremos ahora a la unicidad de la función. Probaremos esto inductivamente. Comenzaremos viendo que $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$. Notemos que para $n \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $f(n) \geq n$ (pues f es estrictamente creciente). De este modo, para cualquier $n \geq 1$, $f(n) + f(n+1) \geq 2n + 1 \geq 3$, por lo cual ni 1 ni 2 pueden ser de la forma $f(n) + f(n+1)$. Esto requiere existan x y y tales que $f(x) = 1$ y $f(y) = 2$.

Ahora, $1 \leq f(1) \leq f(x) = 1$, de modo que $x = 1$. Así, $y \geq 2$ y por tanto $2 \leq f(2) \leq f(y) = 2$, por lo que $y = 2$. Concluímos que $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$.

Procediendo con la inducción, supondremos (1) y (2) para los valores en $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$. Veremos que $f(2n+1) = 3n+1$ y que $f(2n+2) = 3n+2$. Esto se debe a que por hipótesis inductiva todos los números de la forma $f(n) + f(n+1)$ hasta ahora son múltiplos de 3, de modo que $3n+1$ y $3n+2$ deben estar en la imagen. Como f es creciente, no se los puede saltar ahora, pues "ya no podrá regresarse". De este modo, $f(2n+1) = 3n+1$ y que $f(2n+2) = 3n+2$, como queríamos.

Así, si una f cumple, justo tiene que ser la que propusimos, y ya vimos que esta en efecto funciona. $\square$

5. Para resolver este problema usaremos números complejos. Denotaremos por a, b y c los puntos correspondientes a los vértices A, B y C del triángulo respectivamente. El ortocentro de ABC estará en h y el gravicentro de AMN en g. Podemos rotar, trasladar y escalar el triángulo de modo que el circuncentro de ABC esté en 0 y de modo que $a = 1$. Tras esta suposicón, concluímos que $|b| = |c| = 1$ y además, es un hecho conocido que $h = a + b + c$.

   El punto medio de BC es $\frac{b+c}{2}$. El punto medio de AC es $\frac{a+c}{2}$. Así, el gravicentro de AMN es $g = \frac{\frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} + a}{3} = \frac{3a+b+2c}{6}$. De esta forma, de la hipótesis $h = g$ obtenemos que $3a+5b+4c = 0$.

   Aquí usaremos $a = 1$ y conjugaremos esta última ecuación. Recordando que $|b| = |c| = 1$, tenemos que $b = \overline{b}$ y $c = \overline{c}$. Así, conjugando la igualdad $3+5b+4c = 0$ obtenemos $3+\frac{5}{b}+\frac{4}{c} = 0$. Despejando b de la primera y substituyendo en la segunda, obtenemos dos posibilidades para c: i y $-i$. Respectivamente, con estos valores de c obtenemos los valores posibles para b: $\frac{4i-3}{5}$ y $\frac{4i+3}{5}$.

   Como las ternas de soluciones $(1, \frac{-4i-3}{5}, i)$ y $(1, \frac{4i-3}{5}, -i)$ son una la conjugada de la otra, basta ver qué sucede con una. Haciendo el dibujo de la primer terna, obtenemos que $\angle A = 45° + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, $\angle B = 45°$ y $\angle C = 45° + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. $\square$

6. La respuesta es que el pasajero 2012 tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ de sentarse en el lugar que le toca. Veremos esto a partir de una biyección que preserva probabilidad.

   Diremos que los pasajeros "se sentaron $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$" si al pasajero i le tocó el asiento a_i. Notamos que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una forma válida de sentarse si y sólo si se cumplen las siguientes dos cosas:

   - $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una permutación de $(1, 2, \ldots, 2012)$, y

- $\star$ Para cada $k \in \{2, 3, \dots, 2012\}$ se cumple que si $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ son todos distintos de k, entonces $a_k = k$.

La argumentación de esto se sigue directamente de la forma de plantear el problema. Notemos que la segunda parte se pide sólo para cada $k \geq 2$.

Si $a_{2012} = m \neq 1$, entonces a_1, a_2, $\dots$, a_{m-1} no son m y por ($\star$), $a_m = m = a_{2012}$, de modo que $m = 2012$. Entonces concluimos que $a_{2012} = 2012$ o que $a_{2012} = 1$.

Sea A el conjunto de formas de sentarse válidas con $a_{2012} = 1$ y B el conjunto de formas de sentarse válidas con $a_{2012} = 2012$. Daremos una biyección entre A y B.

Tomemos una forma válida en A. Tomemos el m tal que $a_m = 2012$. Consideremos la forma que se obtiene de intercambiar a_k por a_{2012}. Por supuesto, de nuevo obtenemos una permutación. Tenemos que ver que se sigue cumpliendo ($\star$).

- Para las k en $\{2, 3, \dots, m-1\}$ no hicimos ningún cambio, así que se sigue cumpliendo $\star$.
- Para $k = m$, si a_1, a_2, $\dots$, a_{m-1} no son m, esto querría decir que $a_m = m$, pero esto no se puede pues $a_m = 2012$, así que aquí no hay problema.
- Finalmente, para k en $\{m+1, m+2, \dots, 2012\}$, tenemos que a_1, a_2, $\dots$, a_{k-1} no son k si y sólo si no lo eran antes (pues metimos un 1 por ahí enmedio), de modo que de nuevo se preserva ($\star$).

La operación entonces está bien definida. De modo similar se ve que su inversa también está bien definida y por tanto tenemos una biyección entre A y B.

Pero más aún, esto preserva probabilidad, pues si a_k se sentó en el lugar 2012 en determinado momento y el lugar 1 estaba disponible, entonces en realidad tenía la misma probabilidad de sentarse en 1 o en 2012 y el resto de las asignaciones se podía dar igual.

Así, hemos dado una biyección que preserva probabilidad entre A y B, y como estos forman una partición de los eventos posibles, entonces la probabilidad de que a P_{2012} se siente en el asiento 2012 es $\frac{1}{2}$. $\square$