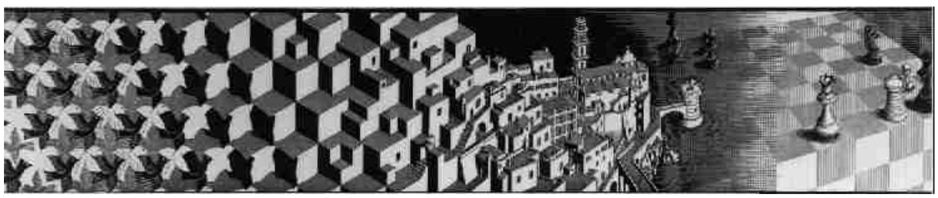
Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2011
Segunda Etapa con Soluciones



Problemas

1. (10 puntos) Evalúa la suma
$$\left\lfloor \frac{1}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{13} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{3^{101}}{13} \right\rfloor .$$
Aquí $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a x.

2. Sea x un número real.
   - (4 puntos) Supongamos que existen tres enteros distintos a, b y c de modo que $x+a$, $x+b$ y $x+c$ están en progresión geométrica. ¿A partir de esto se puede deducir que x es racional?
   - (6 puntos) Supongamos que x es racional. ¿Siempre existen tres enteros distintos a, b y c tales que $x+a$, $x+b$ y $x+c$ están en progresión geométrica?

3. (10 puntos) Sea $A_0A_1 \ldots A_{14}$ un $15-$ágono regular. Muestra que
$$\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7}.$$

4. (10 puntos) La sucesión $\{x_n\}$ cumple que $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}}$. Muestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

5. (10 puntos) Se tienen pelotas, cada una de ellas con un entero positivo (hay muchas pelotas con cada número). Se llena un bote con 2011 pelotas, cada una de ellas con el número 2011. En un *paso* se permite elegir una pelota del bote y cambiarla por una cantidad finita de pelotas, pero todas ellas con número menor al de la pelota que se sacó. ¿Es posible hacer pasos indefinidamente?

6. (10 puntos) Sea S un conjunto no vacío con una operación asociativa que se cancela por la derecha y por la izquierda ($xy = xz$ implica $y = z$ y $xy = zy$ implica $x = z$). Además, para cada elemento a en S el conjunto $\{a^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es finito. ¿Debe S ser un grupo?

Soluciones

1. Notemos módulo 13 que las potencias de 3 van dejando residuos $1, 3, 9, 1, 3, 9, 1\dots$. Así:

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{1}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{13} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{3^{101}}{13} \right\rfloor &= \frac{1-1}{13} + \frac{3-3}{13} + \frac{3^2-9}{13} + \frac{3^3-1}{13} + \cdots + \frac{3^{100}-3}{13} + \frac{3^{101}-9}{13} \\ &= \frac{1}{13}(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{101}) - \frac{34(1+3+9)}{13} \\ &= \frac{3^{102}-1}{26} - 34.\end{aligned}$$

$\square$

2.
   - Sí, se puede deducir que x es racional. Como $x+a$, $x+b$, $x+c$ están en progresión geométrica, se tiene $(x+a)(x+c) = (x+b)^2$. Desarrollando esta expresión y simplificando algunos términos, tenemos que $(a+c-2b)x = b^2 - ac$. Afirmamos que $a + c - 2b \neq 0$. Si fuera 0 entonces también $b^2 - ac$ sería 0, y por lo tanto, $(a+c)^2 = 2b^2 = 4ac$, por lo que $(a-c)^2 = 0$ y por tanto $a = c$, contradiciendo que a y c son distintos. De este modo, $x = \frac{a+c-2b}{b^2-ac}$ es un número racional. $\square$

   - Sí, veremos que siempre existen esos números. Escribamos $x = \frac{p}{q}$ con p entero y q entero mayor a 0. Si $p = 0$, entonces $x = 0$ y los tres números distintos $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$ funcionan. Así, podemos suponer $p \neq 0$. Afirmamos que $a = 0$, $b = p$ y $c = p(2+q)$ funcionan.

     Veamos que son distintos. Como $p \neq 0$, entonces $a \neq b$. Si pasara $a = c$, como $p \neq 0$ entonces tendríamos $2 + q = 0$ y por tanto $q = -2$ lo cual no se puede pues $q > 0$. Si pasara $b = c$, como $p \neq 0$ entonces $2 + q = 1$ y por tanto $q = -1$, lo cual tampoco se puede. Así, en efecto a, b y c son distintos.

     Además, observemos que:

     $$\frac{x+b}{x+a} = \frac{\frac{p}{q} + p}{\frac{p}{q}} = 1 + q$$

     y que

     $$\frac{x+c}{x+b} = \frac{\frac{p}{q} + p(2+q)}{\frac{p}{q} + p} = \frac{\frac{1+2q+q^2}{q}}{\frac{1+q}{q}} = 1 + q$$

     Por lo tanto, $x+a$, $x+b$ y $x+c$ están en progresión geométrica. $\square$

3. *Primera solución*

Usaremos números complejos. Como la igualdad que queremos probar es homogénea bajo homotecias, basta mostrarla para un $15-$ágono regular de radio 1. Tomemos $w = e^{\frac{2\pi i}{30}}$. Entoces 1, w^2, w^4, …, w^{28} son los vértices de un $15-$ágono regular de radio 1 en el plano complejo. Así, basta ver que:

$$\frac{1}{|1-w^2|} = \frac{1}{|1-w^4|} + \frac{1}{|1-w^8|} + \frac{1}{|1-w^{14}|}$$

Para poder trabajar cómodamente quitando las normas, rotaremos w^2, w^4 y w^8 alrededor de 1 para que caigan en la recta por 1 y w^{14}. Estas rotaciones son:

$$\begin{aligned} e_2 &= 1 + w^6(w^2-1) \\ e_4 &= 1 + w^5(w^4-1) \\ e_8 &= 1 + w^3(w^8-1) \end{aligned}$$

De este modo, $w^{14}-1$, e_2-1, e_4-1, e_8-1 están en la misma recta por el origen y por tanto $\frac{1}{w^{14}-1}$, $\frac{1}{e_2-1}$, $\frac{1}{e_4-1}$ y $\frac{1}{e_8-1}$ también. Así:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|1-w^2|} = \frac{1}{|1-w^4|} + \frac{1}{|1-w^8|} + \frac{1}{|1-w^{14}|} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{|e_2-1|} = \frac{1}{|e_4-1|} + \frac{1}{|e_8-1|} + \frac{1}{|w^{14}-1|} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{e_2-1} = \frac{1}{e_4-1} + \frac{1}{e_8-1} + \frac{1}{w^{14}-1} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{w^6(1-w^2)} = \frac{1}{w^5(1-w^4)} + \frac{1}{w^3(1-w^8)} + \frac{1}{w^{14}-1} \end{aligned}$$

Multiplicando las fracciones, tenemos que esto pasa si y sólo si:

$$\begin{aligned} (w^4-1)(w^8-1)(w^{14}-1) = w(w^2-1)(w^8-1)(w^{14}-1) + w^3(w^2-1)(w^4-1)(w^{14}-1) \\ + w^6(w^2-1)(w^4-1)(w^8-1) \end{aligned}$$

Desarrollando tenemos que esto sucede si y sólo si:

$$\begin{aligned} w^{26} - w^{12} - w^{14} + w^4 - w^{22} + w^8 + w^{14} - 1 = {} & w^{25} - w^{11} - w^{17} + w^3 - w^{23} + w^9 + w^{15} - w \\ & + w^{23} - w^9 - w^{19} + w^5 - w^{21} + w^7 + w^{17} - w^3 \\ & + w^{20} - w^{12} - w^{16} + w^8 - w^{18} + w^{10} + w^{14} - w^6 \end{aligned}$$

Pero esta igualdad es cierta, pues todo se cancela usando que $w^{15} = -1$ y por tanto $w^k + w^{15+k} = 0$ para toda k entera. $\square$

Segunda Solución

De nuevo, basta probarlo para el 15−ágono regular de radio 1. Sea O su centro. Usaremos trigonometría. Para abreviar la notación, usaremos c_n para denotar $\cos n\frac{\pi}{30}$. Algunas observaciones de esta notación.

- ($\star$) Si $n \in \{1, 2 \ldots, 30\}$, entonces $c_n + c_{30-n} = 0$.
- La fórmula de coseno de medio ángulo nos dice que $c_n = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$.
- Usando Ley de Cosenos en el triángulo A_0A_kO ($k \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$) tenemos que:

$$A_0A_k = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-c_{4k}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+c_{30-4k}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_{15-2k}}$$

- La identidad de producto triple de cosenos nos dice que:

$$c_l c_m c_m = \frac{1}{4}(c_{l+m+n} + c_{l+m-n} + c_{l-m+n} + c_{l-m-n})$$

De este modo tenemos la siguiente cadena de si y sólo si (en la cual vamos cancelando las constantes):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_0A_1} = \frac{1}{A_0A_2} + \frac{1}{A_0A_4} + \frac{1}{A_0A_7} \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{c_{13}} = \frac{1}{c_{11}} + \frac{1}{c_7} + \frac{1}{c_1} \\ \Leftrightarrow &c_{11}c_7c_1 = c_{13}c_7c_1 + c_{13}c_{11}c_1 + c_{13}c_{11}c_7 \end{aligned}$$

Por la identidad de producto triple de cosenos, esto pasa si y sólo si:

$$\begin{aligned} c_{19} + c_{17} + c_5 + c_3 = &c_{31} + c_{17} + c_9 + c_5 + c_{21} + c_{19} \\ &+ c_7 + c_5 + c_{25} + c_{23} + c_3 + c_1 \end{aligned}$$

Pero esta idendidad es cierta usando ($\star$) y que $c_{31} + c_1 = c_{29} + c_1 = 0$. $\square$

Tercera Solución

Usaremos el Teorema de Ptolomeo, que dice que si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico convexo, entonces $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Todo polígono regular es cíclico, de modo que hay muchas formas de elegir cuatro de los 15 vértices de modo que nos de información acerca de las longitudes.

Para $k \in \{1, \ldots, 7\}$, nombremos $l_k = A_0A_k$. Del cuadrilátero $A_0A_1A_2A_4$ tenemos la igualdad $l_2l_3 = l_1l_4 + l_1l_2$ $(\star)$. Del cuadrilátero $A_0A_4A_7A_8$ tenemos la igualdad $l_4l_7 = l_1l_4 + l_3l_7$.

A partir de la segunda igualdad podemos deducir $\frac{l_3-l_4}{l_1l_4} - \frac{1}{l_7} = 0$. Multiplicando por $\frac{l_2}{l_2}$ el primer sumando y usando $(\star)$, tenemos que $\frac{l_1l_4+l_1l_2-l_2l_4}{l_1l_2l_4} + \frac{1}{l_7} = 0$. Multiplicando esta última igualdad por $l_1l_2l_4$ obtenemos $\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_4} + \frac{1}{l_7} - \frac{1}{l_1}$. Sumando $\frac{1}{l_1}$ de ambos lados obtenemos la igualdad buscada. $\square$

4. *Primera Solución*

   Demostraremos primero que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe.

   - $x_n \geq 1$ para toda n entero positivo.
     Demostraremos esto por inducción. Claramente $x_1 = 2 \geq 1$. Ahora, supongamos $x_n \geq 1$. Entonces $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \geq 1$.
   - $\{x_n\}$ es decreciente.
     Basta ver que $x_{n+1} \leq x_n$. Probaremos esto por inducción. Para el caso base, $x_2 = \sqrt{x_1 + \frac{1}{1}} = \sqrt{3} \leq 2 = x_1$.

     Ahora, supongamos $x_n \geq x_{n+1}$. Entonces $x_n + \frac{1}{n} \geq x_{n+1} + \frac{1}{n} \geq x_{n+1} + \frac{1}{n+1} \geq 0$, por lo que $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{n+1}} = x_{n+2}$, como queríamos.

   Por estos dos incisos, la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. Sea $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Por el primer inciso que demostramos, $l \geq 1$. Además:

   $$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{l}$$

   De este modo, $l^2 = l$ y por tanto $l = 0$ ó $l = 1$. Pero $l \geq 1$ y por tanto $l = 1$. $\square$

   Segunda Solución

   Al igual que en la primer solución, demostramos que $x_n \geq 1$ para todo entero positivo n.

   Observación: Si $n \geq 1$, entonces $1 \leq 3n$, por lo que $n + 1 \leq 4n$ y entonces $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

   Probaremos inductivamente que $x_n \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. En efecto, $x_1 = 2 \leq 3 = 1 + \frac{2}{\sqrt{1}}$. Ahora, suponiendo $x_n \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ tenemos que $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

   Así, definiendo $y_n = 1$, $z_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ tenemos $y_n \leq x_n \leq z_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 1 = \lim_{n\to\infty} z_n$ y por tanto aplicando Teorema del Sandwich tenemos que $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe y vale 1. $\square$

5. No es posible continuar el proceso indefinidamente. Vamos a demotrar lo siguiente por inducción fuerte sobre n:

   Lema Si comenzamos con una pelota marcada con n entonces el proceso termina.

Demostración Si $n = 1$, entonces al sacar la pelota ya no puede entrar ninguna otra y por tanto ya no se pueden hacer pasos. Supongamos que para $k < n$ al empezar con una pelota marcada con k el proceso termina. Tomemos un bote con una pelota marcada con n. Al hacer un paso, se cambia la pelota que tiene n por m pelotas con números menores k_1, …, k_m. Por hipótesis inductiva, el proceso debe terminar jugando con cada una de estas pelotas, y como son una cantidad finita de pelotas, entonces en total el juego fue finito. □

En particular, el juego debe terminar si la pelota inicial tiene a 2012 no importa que hagamos. Por ejemplo, termina si cambiamos esa pelota por 2011 pelotas con el número 2011, que es el caso del problema. □

Nota: Aunque no se pueda hacer el proceso indefinidamente, puede tomar una cantidad arbitrariamente grande de pasos.

6. Sí, se puede demostrar que S es un grupo. Como la operación es asociativa, basta ver que exite un neutro y existen inversos.

   Tomemos $a \in S$. Ya que el conjunto $\{a^n : n = 1, 2, \ldots\}$ es infinito, existen dos enteros $n > m+1$ tales que $a^n = a^m$. Como $n > m$, entonces a^{n-m} está definido. Veremos que a es un neutro para el grupo. Tomemos $b \in S$. Tenemos que $a^m(a^{n-m}b) = (a^m a^{n-m})b = a^n b = a^m b$. Usando cancelación tenemos $a^{n-m}b = b$. De modo similar, $(ba^{n-m})a^m = b(a^{n-m}a^m) = ba^n = ba^m$ y usando cancelación, $ba^{n-m} = b$. De este modo, a^{n-m} sirve como neutro del grupo.

   Sólo queda por ver que a tenga un inverso. Como $n > m + 1$, entonces a^{n-m-1} está definido. Notemos que $a^{n-m-1}a = a^{n-m} = aa^{n-m-1}$, por lo que a^{n-m-1} sirve como inverso de a. □

   Nota: Es todo lo que hay que hacer, ya demostramos la existencia de un neutro, y para cada a dimos un inverso.