

Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2011

Segunda Etapa Examen de Prueba

Jueves 25 de Agosto de 2011

Bienvenido a la Segunda Etapa del Concurso Universitario Galois-Noether



- Responde a las preguntas justificando cada uno de tus pasos. Cada problema se califica sobre 10 puntos y se darán puntos parciales por avances hacia la solución de un problema.
- Tienes 4 horas y media para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.

1. (10 puntos) Resuelve la ecuación $[x] \{x\} = 1991x$.

Aquí $[x]$ denota al mayor entero menor o igual que x y $\{x\} = x - [x]$ es la parte fraccionaria de x .

2. (10 puntos) Sea A una matriz de $n \times n$ de modo que $A_{ij} = i + j$. Encuentra el rango de A .
3. (10 puntos) Una parábola es la rotación de otra por 90° en algún punto del plano. Muestra que los puntos en los que se intersectan están en una misma circunferencia.
4. (10 puntos) Muestra que si existe un n -ágono tal que todos sus vértices tienen coordenadas enteras, y todos sus lados son de igual longitud, entonces n es par.

5. (10 puntos) Sea $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ una función biyectiva. Demostrar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}$ existe, entonces este límite es igual a 1.
6. (10 puntos) Se eligen $2n$ puntos en una cuadrícula de $n \times n$. Muestra que para alguna $k > 1$ es posible elegir $2k$ puntos distintos, digamos a_1, a_2, \dots, a_{2k} , de modo que a_{2i-1} y a_{2i} están en la misma fila, a_{2i} y a_{2i+1} están en la misma columna para cualesquiera índices i (tomados módulo $2n$).