2° Concurso Unversitario de Matemáticas Galois-Noether 2012
Primera Etapa

Sábado 26 de mayo de 2012

Bienvenido a la Primera Etapa del Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether

- **Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada repuesta correcta vale un punto.**
- **Tienes 2 horas y media para resolver el examen.**
- **Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.**

1. Determina el promedio de los siguientes números:

$$\frac{1+2+3}{3}, \frac{2+3+4}{3}, \frac{3+4+5}{3}, \dots, \frac{2010+2011+2012}{3}.$$

(a) $\frac{2013}{3}$ (b) $\frac{2013}{2}$ (c) $\frac{2011}{3}$ (d) $\frac{2011}{2}$

2. Sea G un grupo. Sea g un elemento de G de orden 3 y h un elemento de G de orden 5. ¿Cuál es el orden de hgh^{-1}?

(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 15

3. Encuentra

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n}.$$

(a) ∞ (b) 1 (c) 0 (d) $-\infty$

4. ¿Qué punto en el plano $x + 2y + 3z$ está más cerca del origen?

   (a) $(0, 0, 0)$ (b) $(1, 1, 1)$ (c) $(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7})$ (d) $(3, \frac{3}{2}, 0)$

5. Considera $T : \mathbb{R}^{2012} \to \mathbb{R}^{1006}$ dada por $T(x_1, x_2, \ldots, x_{2012}) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4 +, \ldots, x_{2011} + x_{2012})$. ¿Cuál es la dimensión del núcleo de T?

   (a) 2012 (b) 1509 (c) 1006 (d) 503

6. Tres gatos blancos, tres gatos negros y tres gatos grises se reúnen a cantarle a la Luna. Se dividen en tres grupos de tres. Un grupo canta a las 10, uno a las 11 y uno a las 12. Además, en un grupo no quedaron gatos del mismo color. ¿De cuántas formas pudieron dividirse en grupos?

   (a) 36 (b) 216 (c) 243 (d) 729

7. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que requiere un caballo de ajedrez para llegar de una esquina de un tablero de 17×17 a la esquina opuesta?

   (a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14

8. Encuentra el valor de la siguiente integral:

$$\int_{-4}^{4} \lceil |4 - x| \rceil \, dx$$

   Aquí $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x.

   (a) 10 (b) 12 (c) 16 (d) 20

9. El cuadrado $ABCD$ tiene lado 1. Se rota 30° con centro en A. Encuentra el área de la intersección de $ABCD$ con su rotación.

   (a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. Considera la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. ¿En qué punto se intersectan las tangentes a la gráfica de esta función correspondientes a los puntos $x = 0$ y $x = 6$?

    (a) $(3, 13)$ (b) $(4, 14)$ (c) $(2, 12)$ (d) $(3, 14)$

11. Los números x y y son reales positivos tales que $1 + x + x^2 = 4$ y $1 + y + y^2 = 2$. ¿Cuánto vale $1 + (x + y) + (x + y)^2$?

    (a) $5 - \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{13}-1)}{2}$ (b) $5 + \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{13}+1)}{2}$ (c) $5 - \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{13}+1)}{2}$ (d) $5 + \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{13}-1)}{2}$

12. Encuentra el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) 72 (b) 60 (c) -60 (d) -72

13. Se quieren colocar 3 pelotas en un tablero de 2×4 de modo que no queden dos pelotas ni en la misma casilla, ni en casillas que compartan un lado. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

(a) 10 (b) 12 (c) 14 (d) 16

14. ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\left\lfloor \frac{\lfloor 3.75 \rfloor - \lceil -2.75 \rceil}{2} \right\rfloor$$

Aquí $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x y $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x.

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2

15. ¿En cuál de los siguientes intervalos hay una raíz real de $x^3 - 3x^2 + x - 3.01$?

(a) $(2.8, 2.9)$ (b) $(2.9, 3)$ (c) $(3, 3.1)$ (d) $(3.1, 3.2)$

16. Se define la operación # como $a\#b = \frac{2ab}{a+b}$. Encuentra el valor de $\frac{6\#17}{11\#12}\#1$.

(a) $\frac{17}{22}$ (b) $\frac{34}{39}$ (c) $\frac{17}{11}$ (d) $\frac{39}{34}$

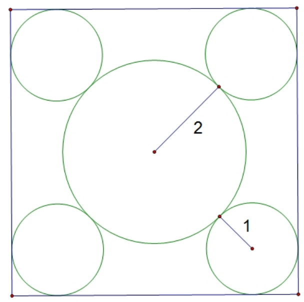
17. Sea $\mathbb{Z}^2$ el conjunto de todos los puntos con coordenadas enteras en el plano. Trazamos todas las líneas verticales, horizontales y con pendiente -1 que pasen por algún punto de $\mathbb{Z}^2$. Esto hace que el plano quede dividido en triangulitos rectángulos con catetos de longitud 1.

¿Cuántas funciones $f : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$ existen tales que para cada tres puntos a, b, c que formen un triangulito se tiene que $f(a) + f(b) + f(c)$ es impar?

(a) Una (b) Dos (c) Cuatro (d) Una infinidad

18. En la siguiente figura, el circulo central tiene radio 2 y los círculos pequeños son de radio 1 y tangentes externamente al de radio 2. Las tangentes a los círculos pequeños forman un cuadrado. Encuentra la longitud del lado de este cuadrado.

(a) $3\sqrt{2} + 2$ (b) $4\sqrt{2}$ (c) 6 (d) 8



19. ¿Cuántas soluciones reales (p, q, r) tiene el siguiente sistema de ecuaciones?

$$p^2 - q = -3$$
$$q^2 - r = -4$$
$$r^2 - p = -5$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

20. La matriz A es de 2×2 y tiene entradas reales. Su traza es 2 y su determinante es 1. Sea I la matriz identidad de 2×2. Una expresión equivalente para A^{11} es:

(a) $11A + 10I$ (b) $10A - 11I$ (c) $11A - 10I$ (d) $10A + 11I$

21. ¿Para qué enteros n (y sólo esos) se tiene que $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ es divisible entre 7?

(a) Para todos
(b) Para los múltiplos de 7
(c) Para los que no son múltiplos de 7
(d) Para los que $n(n-1)$ no es múltiplo de 7

22. La sucesión x_n cumple $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$ y $x_{n+3} = 4x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n$ para $n \geq 1$. ¿Cuál es el valor de x_{2012}?

(a) $2^{2012} - 1$ (b) $2^{2012} + 1$ (c) $3^{2012} - 1$ (d) $3^{2012} + 1$

23. ¿Cuál de los siguientes números no divide a $3^{105} + 4^{105}$?

(a) 7 (b) 11 (c) 13 (d) 379

24. Los reales x, y y z cumplen $y(y+z)(z+x) \neq 0$ y $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{y+z} = \frac{y+z}{z+x}$.

¿Cuál es el valor de $\frac{x+2y+3z}{2y+3z+4x}$?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) No se puede determinar

25. Encuentra el dígito en la posición 1000 a la derecha del punto decimal en el número $\left(8 + \sqrt{63}\right)^{2012}$.

(a) 1 (b) 3 (c) 7 (d) 9