

# Concurso Universitario de Matemáticas Galois-Noether 2011

## Primera Etapa

Sábado 20 de Agosto de 2011

Bienvenido a la Primera Etapa del Concurso Universitario Galois-Noether



- Resuelve el examen en la hoja de respuestas anexa. Cada respuesta correcta vale un punto.
- Tienes 2 horas y media para resolver el examen.
- Recuerda que no puedes usar calculadoras, teléfonos celulares, tablas, libros, apuntes, etc.

1. ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir  $1 + 2 + \dots + 48$  entre 14?  
(a) 0                                      (b) 2                                      (c) 4                                      (d) 7
2. Se tienen 10 gatos negros y 10 gatos blancos. ¿De cuántas formas se pueden elegir 2 gatos negros y 2 gatos blancos?  
(a) 2025                                      (b) 4845                                      (c) 8100                                      (d) 10000
3. Si  $f(0) = 0$  y para cada entero  $n \geq 0$  se cumple  $f(n+1) = nf(n) + 1$ , ¿cuál es el valor de  $f(6)$ ?  
(a) 206                                      (b) 301                                      (c) 321                                      (d) 326
4. Sea  $k$  un entero positivo. El conjunto  $S$  tiene  $k$  elementos. ¿Cuántas funciones inyectivas hay de  $S$  a  $S \times S$ ?  
(a)  $(k^2)!$                                       (b)  $(k!)^2$                                       (c)  $k^{2k}$                                       (d)  $\frac{(k^2)!}{(k^2-k)!}$

5. ¿Cuál es el rango de la siguiente matriz?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. ¿Cuántas soluciones enteras positivas  $x$  y  $y$  tiene la ecuación  $3x + 5y = 200$ ?

- (a) 2 (b) 13 (c) 40 (d) 66

7. Si  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $c^2 + d^2 = 1$  y  $ac - bd = \frac{1}{2}$ , ¿Cuál es el valor positivo de  $ad + bc$ ?

- (a)  $\frac{1}{2}$  (b)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  (c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (d) 2

8. ¿Cuál es el radio del círculo con ecuación  $x^2 + y^2 = 8x + 6y$ ?

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

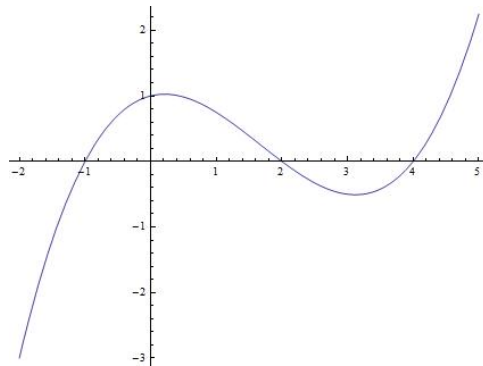
9. ¿Qué orden tiene el elemento  $(3, 2, 1)$  en el grupo aditivo  $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ ?

- (a) 5 (b) 15 (c) 30 (d) 45

10. Sean  $p$  y  $q$  números primos distintos. ¿Cuántos divisores tiene  $(pq)^{pq}$ ?

- (a)  $(pq + 1)^2$  (b)  $(pq)^2 + 1$  (c)  $(p^2 + 1)(q^2 + 1)$  (d)  $(p + 1)(q + 1)$

11. Sea  $f$  una función diferenciable. Su derivada,  $f'$ , tiene la siguiente gráfica:



¿Cuáles de las siguientes afirmaciones siempre son ciertas?

- i)  $f$  tiene un mínimo en el intervalo  $(0, 1)$ .

- ii)  $f$  tiene un máximo en el intervalo  $(1, 3)$ .  
 iii)  $f$  tiene un mínimo en el intervalo  $(3, 5)$ .  
 iv)  $f$  tiene un cero en el intervalo  $(-2, 3)$ .
- (a) ii y iv                      (b) ii, iii y iv                      (c) ii, iii                      (d) i, ii y iii
12. ¿Cuál es el valor de  $\int_{-2}^2 e^{x^2} \sin x \, dx$ ?
- (a)  $\pi^2$                       (b)  $\pi$                       (c)  $2 \cos^{-1} 1$                       (d) 0
13. ¿Para qué valor de  $x$  se alcanza la distancia mínima entre un punto de la hipérbola  $y = \frac{1}{x-1} + 1$  y el punto  $(0, 0)$ ?
- (a) 0                      (b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$                       (c)  $\sqrt{2}$                       (d) 2
14. Sea  $f$  una función tal que  $f(x) = f(1-x)$  para todo real  $x$ . Si  $f$  es diferenciable en cualquier real, entonces  $f'(0)$  es igual a:
- (a)  $f(1)$                       (b)  $-f(1)$                       (c)  $-f'(1)$                       (d)  $f'(1)$
15. Encuentra  $(1+i)^{2011}$
- (a)  $\sqrt{2}^{2011}(i+1)$                       (b)  $\sqrt{2}^{2011}(i-1)$                       (c)  $2^{1005}(i+1)$                       (d)  $2^{1005}(i-1)$
16. Sea  $n$  un entero positivo. Hay  $n$  tipos distintos de mascotas. Andrés compra algunas mascotas. Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  se cumple que todas las mascotas que compró Andrés son del tipo  $j$ , excepto  $n-1$  de ellas. ¿Cuántas mascotas compró Andrés?
- (a) 3                      (b)  $n$                       (c)  $2n$                       (d)  $n^2$
17. Encuentra  $\sum_{k=1}^{100} i^{(k^2)}$ .
- (a) 0                      (b)  $25i$                       (c)  $50(1+i)$                       (d) 50
18. La matriz  $A$  es de  $3 \times 3$  y cumple que  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y que  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . ¿Cuál es el valor de  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ?
- (a)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$                       (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$                       (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$                       (d) No se puede determinar

19. ¿Para qué valores de  $s$  y  $t$  el siguiente sistema de ecuaciones en  $x$ ,  $y$  y  $z$  no tiene soluciones?

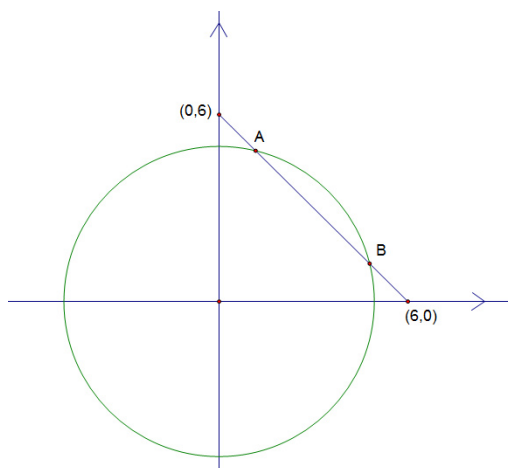
$$2x + 3y = s$$

$$3y + 4z = 0$$

$$2x + tz = 5$$

- (a)  $t \neq -4, s = 5$       (b)  $t = 4, s \neq -5$       (c)  $t = -4, s \neq 5$       (d)  $t \neq 4, s \neq 5$

20. La figura muestra una circunferencia de radio 5 centrada en el origen. Encuentra la distancia entre los puntos  $A$  y  $B$ .



- (a)  $\sqrt{29}$       (b)  $\frac{5}{2}\pi$       (c)  $2\sqrt{7}$       (d)  $3\sqrt{3}$

21. ¿Cuántas soluciones tiene  $\sin x = \frac{4}{49\pi^2}x^2$  en el intervalo  $(0, 4\pi)$ ?

- (a) 4      (b) 3      (c) 2      (d) 1

22. Si  $f$  es una función diferenciable con  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = c$ , ¿cuánto vale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^2}$ ?

- (a)  $c$       (b)  $\frac{c}{2}$       (c)  $2c$       (d) No necesariamente existe.

23. ¿Cuál es la suma de todos los enteros capicúas de 3 dígitos? **Nota:** Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

- (a) 48500      (b) 49400      (c) 49500      (d) 49950

24. Encuentra el valor de  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ .

- (a)  $e$       (b)  $2e$       (c)  $e^2$       (d)  $\log 2$

25. Determina el valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4+2^4+\dots+n^4}{n^5}$ .

(a)  $\frac{1}{5}$

(b)  $\frac{1}{4}$

(c)  $\frac{1}{3}$

(d)  $\infty$