Ejemplos adicionales

Introducción a la sección 7.6; 7.3.1, 8.1.4.

7.3. Desigualdad Cauchy-Schwarz.

Suponiendo que $a_i > 0$ y $b_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. La desigualdad Cauchy-Schwarz afirma que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

con la igualdad sí y sólo si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = ...a_n/b_n$.

Un prueba puede ser dada usando inducción matemática (ver 7.1.13). Pero un sencillo método es considerar el polinomio cuadrático $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$. Obsérvese que $P(x) \geq 0$ Para todas las x; en efecto, $P(x) = 0$ sólo bajo las condiciones en las cuales $a_1/b_1 = a_2/b_2 = ... = a_n/b_n$ y $x = b_i/a_i$. Ahora

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \end{aligned}$$

y desde que $P(x) \geq 0$,el distintivo de P no puede ser positivo y en realidad igualará a cero sólo cuando $P(x) = 0$. Entonces,

$$\left(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0,$$

o al equivalente,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i bi \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

con igualdad sí y sólo si $a_1/b_1 = ...a_n/b_n$.

En esta desigualdad, note que el requerimiento de que a_i y b_i sean positivos es redundante, ya que para todos a_i, b_i

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| |b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

7.3.1 *Si $a, b, c > 0$, ¿es verdad que $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta < c$ implica que $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$?*

Solución. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}sen^2\theta \\
&\qquad\leq \quad [(\sqrt{a}\cos\theta)^2 + (\sqrt{b}sen\theta)^2]^{1/2}(\cos^2\theta + sen^2\theta)^{1/2} \\
&\qquad= \quad (a\cos^2\theta + bsen^2\theta)^{1/2} \\
&\qquad< \quad \sqrt{c}
\end{aligned}$$

Hay también una solución plausible basada en la desigualdad de las medias aritmética-geométrica:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta\right)^2 &= a\cos^4\theta + 2\sqrt{a}\sqrt{b}\cos^2\theta\sin^2\theta + b\sin^4\theta \\
&\leq a\cos^4\theta + (a+b)\cos^2\theta\sin^2\theta + b\sin^4\theta \\
&= \left(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\
&< c.
\end{aligned}$$

Otra solución, de naturaleza más geométrica, está dada en 7.4.19.

7.3.2 *Supongamos que P es el punto interior del triángulo ABC, y supongamos que r_1,r_2,r_3 denotan las distancias de P a los lados a_1,a_2,a_3 del triángulo respectivamente. Supongamos que R denota el circunradio de ABC. Muestra que*

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}$$

con la igualdad sí y sólo si ABC es equilátero y P es el incentro.

Solución. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} &= \sqrt{a_1r_1}\sqrt{a_2r_2} + \sqrt{a_2r_2}\sqrt{1/a_2} + \sqrt{a_3r_3}\sqrt{1/a_3} \\
&\leq (a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

con igualdad sí y sólo si

$$\frac{\sqrt{a_1r_1}}{\sqrt{1/a_1}} = \frac{\sqrt{a_2r_2}}{\sqrt{1/a_2}} = \frac{\sqrt{a_3r_3}}{\sqrt{1/a_3}},$$

o el equivalente sí y sólo si

$$a_1^2r_1 = a_2^2r_2 = a_3^2r_3.$$

En la desigualdad que precede ,reconocemos que $a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 = 2A$, donde A es el área del triángulo. También, sabemos que el área del triángulo, en términos del radio del circunradio R, está dada por $A = a_1a_2a_3/4R$ (ver 8.1.12). Por lo tanto, $a_1r_1 + a_2r_2 + \ a_3r_3 = a_1a_2a_3/2R$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} &\leq \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ahora, nuevamente por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2 &\leq \left(a_2^2 + a_3^2 + a_1^2\right)^{1/2} \left(a_3^2 + a_1^2 + a_2^2\right)^{1/2} \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) \end{aligned}$$

con igualdad sí y sólo si

$a_2/a_3 = a_3/a_1 = a_1/a_2$ $(= (a_2 + a_3 + a_1) \,/\, (a_3 + a_1 + a_2) = 1$; ver 7.1.10), o equivalentemente, sí y sólo si

$$a_1 = a_2 = a_3.$$

Luego, tenemos

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \leq \frac{1}{\sqrt{2R}} \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{1/2}$$

con igualdad sí y sólo si $a_1^2 r_1 = a_2^2 r_2 = a_3^2 r_3$ y $a_1 = a_2 = a_3$;esto es sí y sólo si $a_1 = a_2 = a_3$ y $r_1 = r_2 = r_3$. Esto completa la prueba.

7.3.3 *Dado que a, b, c, d, e son números reales tales que*

$$\begin{gathered} a + b + c + d + e = 8, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + c^2 = 16, \end{gathered}$$

determina el máximo valor de e.

Solución. Las ecuaciones dadas pueden ser puestas dentro de la forma

$$\begin{gathered} 8 - e = a + b + c + d, \\ 16 - e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \end{gathered}$$

Deseamos encontrar una desigualdad involucrando sólo e; la desigualdad de Cauchy-Schwarz proveé una manera, ya que

$$(a + b + c + d) \leq (1 + 1 + 1 + 1)^{1/2} \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)^{1/2}.$$

Realizando las sustituciones, y elevándolas al cuadrado, tenemos

$$\begin{aligned} (8 - e)^2 &\leq 4\left(16 - e^2\right), \\ 64 - 16e + e^2 &\leq 64 - 4e^2, \\ 5e^2 - 16e &\leq 0, \\ e\,(5e - 16) &\leq 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $0 \leq e \leq \frac{16}{5}$. La cota máxima, $\frac{16}{5}$, se tiene cuando $a = b = c = d = \frac{6}{5}$.

7.3.4 *Supongamos que $a_1, a_2, ...a_n$ son reales $(n > 1)$ y*

$$A + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

prueba que $A < 2a_i a_j$ para $1 \leq i < j \leq n$.

Solución. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= [(a_1 + a_2) + a_3 + ... + a_n]^2 \\
&\leq (1 + ... + 1)\left((a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + ... + a_n^2\right) \\
&= (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1 a_2\right].
\end{aligned}$$

Esto, junto con la desigualdad dada, implica que

$$\begin{aligned}
A &< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \\
&< -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{1}{n-1}\left[(n-1)\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1 a_2\right]\right] \\
&= 2a_1 a_2.
\end{aligned}$$

De forma parecida, $A < 2a_i a_j$ para $1 \leq i < j \leq n$.

7.3.5 *Suponer que $x_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Para cada entero no negativo k, probar que*

$$\frac{x_1^k + ... + x_n^k}{n} \leq \frac{x_1^{k+1} + ... + x_n^{k+1}}{x_1 + ... + x_n}.$$

Solución. Podremos asumir sin perder la generalidad que $x_1 + ... + x_n = 1$, si no, podemos reemplazar x_i por $X_i = x_i / (x_1 + ... + x_n)$.

El resultado se mantiene cuando $k = 0$. Asumáse que el resultado se mantiene para todos los enteros no negativos menores que k.Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k+1)/2} \frac{x_i^{(k-1)/2}}{n} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Asumiendo por inducción, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1}/n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^k$, y de aquí continuando con la ùltima desigualdad, tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k-1}}{n^2}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2}.$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}\right)^{1/2},$$