Proposición 3.1.6. *Si las funciones* f_n *son continuas en* A, *y* $f_n \to f$ *uniformemente, entonces* f *es continua. Similarmente, si las funciones* $g_k(z)$ *son continuas y* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ *converge uniformemente en A, entonces* g *es continua en* A.

Demostración. Es suficiente con demostrar la afirmación para sucesiones (¿por qué?). Queremos mostrar que para $z_0 \in$ A, dada $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Escójase N tal que $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ para toda $z \in A$. Puesto que f_N es continua, existe una $\delta > 0$ tal que $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$. Así, $|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. ■

Note que en el último paso, necesitamos una N que sea independiente de z para concluir que tanto $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ como $|f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3$.

Ejemplos resueltos

3.1.10. *Muestre que la sucesión de funciones* $f_n(x) = \text{sen}\,(x/n)$ *converge uniformemente a la función constante* $f(x) = 0$ *para x en el intervalo* $[0, \pi]$.

Solución. Del cálculo, sen θ es creciente y sen $\theta \le \theta$ para $0 \le \theta \le \pi/2$. Así, si $x \in [0, \pi]$ y $n \ge 2$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |\text{sen}\,(x/n)| \le \text{sen}\,(\pi/n) \le \pi/n$ (véase la figura 3.1.7). Por lo tanto, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $n >$ máx $(2, 2/\varepsilon)$. La misma n funciona para toda x en el intervalo, y así la convergencia es uniforme en $[0, \pi]$.

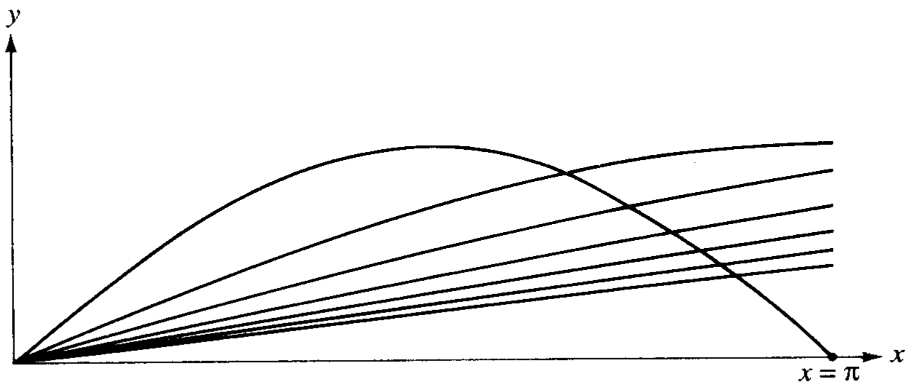

Figura 3.1.7. $y = \text{sen}\,(x/n)$ para n de 1 a 7.

3.1.11. *Muestre que la sucesión de funciones* $f_n(x) = \arctan\,(nx)$ *converge para* x *en el intervalo* $[-5, 5]$, *a la función*

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \textit{para } x < 0 \\ 0 & \textit{para } x = 0 \\ \pi/2 & \textit{para } x > 0 \end{cases}$$

pero que la convergencia no es uniforme. (Véase la figura 3.1.8.)

Solución. Si $x > 0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| = |\arctan(nx) - \pi/2|$. Sabemos que arctan (nx) es una función creciente de x cuyo límite es $\pi/2$ conforme $x \to \infty$. Por lo tanto, $|\arctan(nx) - \pi/2| < \varepsilon$ si y sólo si $nx > \tan(\pi/2 - \varepsilon)$. Para cualquier valor particular de x, funcionarán valores de n suficientemente grandes, pero al tomar x cerca del 0, podemos forzar a la n requerida a ser muy grande. Así, tenemos convergencia pero no convergencia uniforme. (Discusiones similares se aplican para el caso $x \leq 0$.) Uno puede ver indirectamente que la convergencia no debe ser uniforme. Si esto fuera, entonces la función límite sería continua, por la proposición 3.1.6, pero esto no es así.

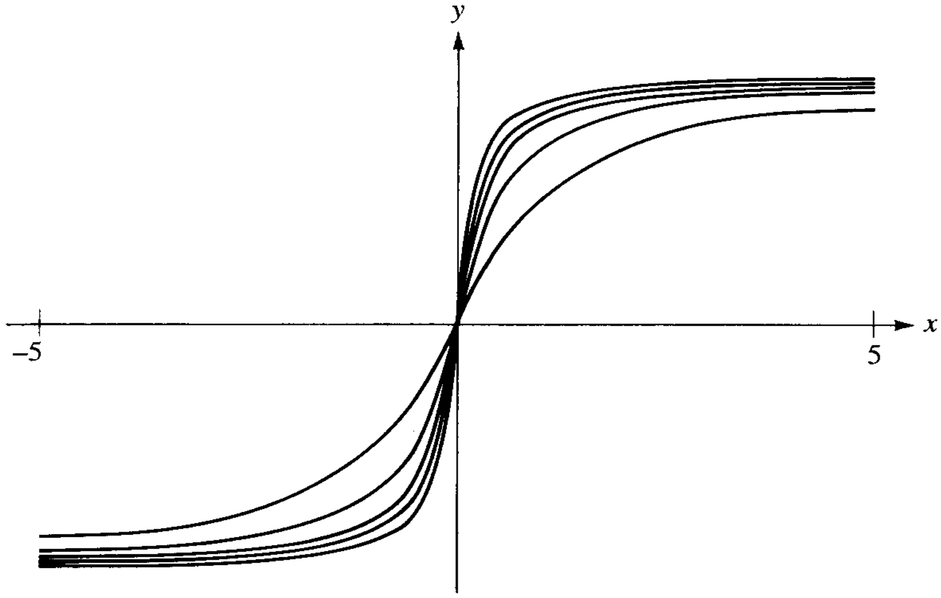

Figura 3.1.8. $y = \arctan(nx)$ para n de 1 a 5.

Los siguientes tres ejemplos desarrollan el importante caso especial de las series geométricas, y muestran cómo las herramientas de esta sección pueden aplicarse para obtener algunos resultados interesantes. El desarrollo de estos ejemplos es típico de las series de potencias más generales, estudiadas en la siguiente sección.

3.1.12. *Muestre que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *converge en el disco unitario abierto* $D = D(0; 1)$ *a la función analítica* $f(z) = 1/(1 - z)$. *Demuestre que la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado* $D_r = \{z \text{ tal que } |z| \leq r\}$ con $r < 1$.

Solución. Si $z \in D$, entonces $z \in D_r$ siempre que $|z| \leq r < 1$. Así, la convergencia en z se sigue del segundo enunciado. Para demostrarlo, suponga que z está en D_r, entonces $|z^n| < r^n$. Ya que $\Sigma\, r^n$ converge (proposición 3.1.13 (i)), se aplica el criterio M de Weierstrass, con $M_n = r^n$ y nuestra serie converge uniforme y absolutamente en D_r. Nos hemos internado en uno de los inconvenientes de herramientas tales como el criterio M de Weierstrass: hemos mostrado que la serie converge pero no hemos identificado el límite. Para hacer esto, note que

$$1 - z^{n+1} = (1 - z)(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)$$

así que

$$\left| \frac{1}{1-z} - \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Ya que $r < 1$, esto tiende a 0 conforme $n \to \infty$, y obtenemos nuestro resultado.

3.1.13. *Muestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ *converge en el disco unitario abierto* D, *a* $g(z) = 1/(1-z)^2$. *La convergencia es uniforme y absoluta en cualquier disco cerrado contenido en* D.

Solución. Si B es cualquier disco cerrado contenido en D, entonces $B \subset D_r$, para algún disco cerrado D_r, como en el último ejemplo. La serie $\Sigma\, z^n$ converge uniforme y absolutamente a $f(z) = 1/(1-z)$ en D_r y, por tanto, en B. Por el teorema de la convergencia analítica (3.1.8(ii)), la serie de las derivadas converge uniformemente en cualquier disco cerrado D a $f'(z)$. Esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = f'(z) = 1/(1-z)^2$, como se quería. La convergencia es absoluta por comparación. Si $|z| \leq r < 1$, entonces $|nz^{n-1}| < nr^{n-1}$, pero $\Sigma\, nr^{n-1}$ converge, por el argumento que se acaba de dar.

3.1.14. *Muestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}z^n/n$ *converge uniforme y absolutamente a* $\log(1+z)$ *en el disco unitario abierto, donde* $\log(\rho e^{i\theta}) = \log\rho + i\theta$ *con* $-\pi < \theta < \pi$.

Solución. Sabemos que la fórmula dada para el log, define una rama del logaritmo en el disco $D(1;1)$. En efecto, ésta es la misma que se describió en la construcción de $\log w = \int_\gamma (1/\zeta)\, d\zeta$, donde γ es la trayectoria rectilínea de 1 a w. Por la independencia con respecto de la trayectoria, garantizada por el teorema de Cauchy, podemos integrar primero a lo largo del arco circular ($r = 1$ constante) y luego a lo largo de un rayo a partir del origen (θ constante), para llegar a 1 a $w = \rho e^{i\theta}$ (véase la figura 3.1.9). Esto da

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \int_0^\theta e^{-i\phi} i e^{i\phi}\, d\phi + \int_1^\rho \frac{1}{re^{i\theta}}\, e^{i\theta}\, dr = i\theta + \log\rho$$

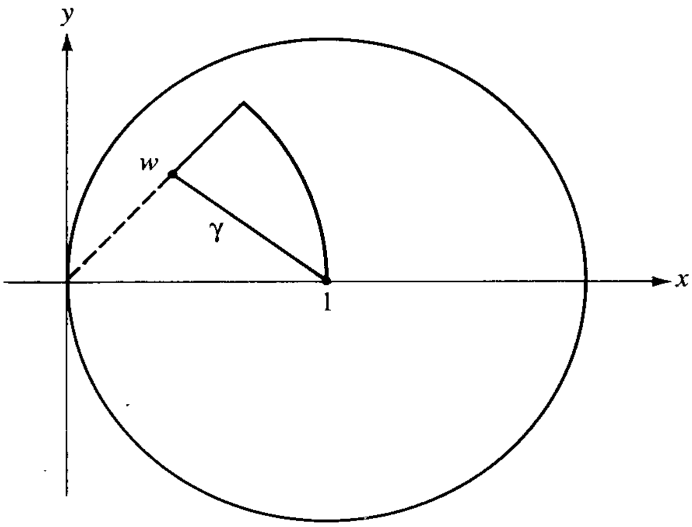

Figura 3.1.9. Trayectorias para calcular log w en $D(1;1)$.

Al cambiar las variables a $\xi = \zeta - 1$ nos da $\log w = \int_\mu 1/(\xi + 1)\, d\xi = \int_\mu 1/[1 - (-\xi)]\, d\xi$, siendo la trayectoria μ una línea recta de 1 a $z = w - 1$ en el disco unitario abierto $D = D(0; 1)$. Por el ejemplo resuelto 3.1.12, el integrando puede ser expandido en una serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n$, la cual converge uniformemente en μ. El teorema de convergencia analítica nos permite integrar término a término para obtener

$$\log w = \int_\mu \left[\sum (-\xi)^n\right] d\xi = \sum \left[\int_\mu (-\xi)^n\, d\xi\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (w-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (w-1)^n}{n}$$

Esto funciona para toda w en $D(1; 1)$. Haciendo $z = w - 1$ nos da $\log(z + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n/n$ para toda z en $D(0; 1)$. Nuevamente, la convergencia es uniforme y absoluta en cualquier D_r, con $r < 1$. En efecto, ya que $|z| \le r$ implica que $|(-1)^n z^n/n| \le r^n/n \le r^n$ y $\sum r^n$ converge, el criterio M de Weierstrass es aplicable con $M_n = r^n$.

3.1.15. *Muestre que la* ***función*** ζ ***de Riemann****, definida como*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

es analítica en la región $A = \{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}$. *Calcule* $\zeta'(z)$ *en ese conjunto.*

Solución. Usamos el teorema de convergencia analítica (3.1.8). Debemos tener cuidado de tratar de demostrar la convergencia uniforme únicamente en discos cerrados en A y no en todo A. En efecto, en este ejemplo no tenemos convergencia uniforme en todo A (véase el ejercicio 8).

Sea B un disco cerrado en A y sea δ su distancia de la línea $\operatorname{Re} z = 1$ (figura 3.1.10). Mostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en B. Aquí $n^{-z} = e^{-z \log n}$, donde $\log n$ significa el log usual de números reales. Ahora $|n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = e^{-x \log n} = n^{-x}$. Pero $x \ge 1 + \delta$ si $z \in B$ y, por tanto, $|n^{-z}| \le n^{-(1+\delta)}$ para toda $z \in B$. Escojamos, por lo tanto, $M_n = n^{-(1+\delta)}$.

Por la proposición 3.13(iii). $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Así, por el criterio M de Weierstrass, nuestra serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en B. Así ζ es analítica en A. También por el teorema de convergencia analítica, podemos diferenciar término a término para obtener

$$\zeta'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) n^{-z}$$

la cual sabemos también debe converger en A (y uniformemente en discos cerrados de A).

3.1.16. *Muestre que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

es analítica en $A = \{z$ tal que $|z| < 1\}$. *Escriba una serie para* $f'(z)$.

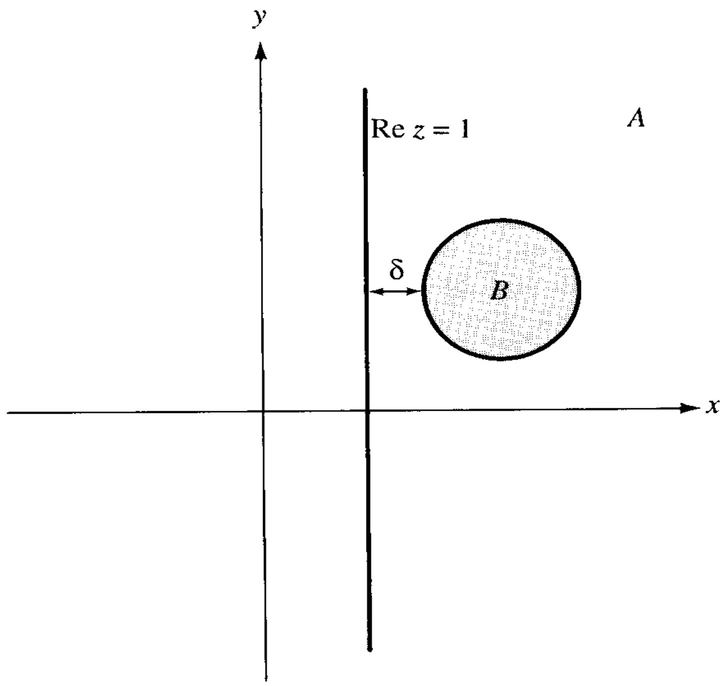

Figura 3.1.10. El dominio de analiticidad de la función zeta de Riemann.

Solución. Usamos otra vez el teorema de convergencia analítica. (Nótese que ésta es una serie de potencias que puede ser abordada de modo alternativo, después que el estudiante haya leído la sección 3.2).
En este caso tenemos realmente la convergencia uniforme en todo A. Sea $M_n = 1/n^2$. Claramente, ΣM_n converge y $|z^n/n^2| < 1/n^2 = M_n$ para toda $z \in A$. Así, por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ converge uniformemente en A; por lo tanto, la serie converge en cualquier disco cerrado de A. Así, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ es una función analítica en A. Más aún.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

(Esta serie, para $f'(z)$, no converge para $z = 1$, por lo que f no puede ser extendida analíticamente en ninguna región que contenga al disco unitario cerrado.)

3.1.17. *Calcule*

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz$$

donde γ es un círculo de radio $\frac{1}{2}$.

Solución. Sea B un disco cerrado en $A = \{z \text{ tal que } |z| < 1\}$ a una distancia δ del círculo $|z| = 1$. Para $z \in B$, $|z^n| = |z|^n \leq (1 - \delta)^n$ con $n \geq 0$. Escogemos $M_n = (1 - \delta)^n$ y notamos que ΣM_n es convergente. Por lo tanto, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es uniformemente convergente en B, así, por el teorema de convergencia analítica, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es analítica en A. Por lo tanto,

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \int_\gamma \frac{1}{z} dz + \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz = 2\pi i$$

por el ejemplo 2.1.12 y el teorema de Cauchy.

3.1.18. *Este ejemplo y el siguiente, ilustran cómo la fórmula integral de Cauchy, puede a menudo ser usada para obtener uniformidad donde podría no ser esperada.*

Definición. *Una familia de funciones $\mathcal{S}$ definida en un conjunto* G, *se dice que es* ***uniformemente acotada en los discos cerrados de*** G *si para cada disco cerrado* $B \subset G$, *existe un número* M(B) *tal que* $|f(z)| \leq M(B)$ *para toda* z *en* B *y para toda* f en $\mathcal{S}$.

Demuestre lo siguiente: Si $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *es una sucesión de funciones analíticas en una región* G, *la cual es uniformemente acotada en los discos cerrados de* G, *entonces la sucesión de las derivadas* $f_1', f_2', f_3', \ldots$ *es también uniformemente acotada en los discos cerrados de* G.

Solución. Suponga que $B = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq r\}$ es un disco cerrado de G. Puesto que B es cerrado y G es abierto, el ejemplo resuelto 1.4.28 muestra que existe un número ρ con $B \subset D(z_0; \rho) \subset G$. Sea $R = (r + \rho)/2$ y $D = \{z \text{ tal que } |z - z_0| \leq R\}$. Por hipótesis, existe un número $N(D)$ tal que $|f_n(z)| \leq N(D)$ para toda n y toda z en D. Γ es el círculo frontera de D, la fórmula integral de Cauchy para derivadas nos da, para cualquier z en B,

$$|f_n'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{N(D)}{(R - r)^2} \right] 2\pi r$$

Así, si ponemos $M(B) = N(D)R/(R - r)^2$, tendremos $|f_n'(z)| \leq M(B)$ para toda n y para toda z en B, como se quería.

Definición 3.1.19. *Una familia $\mathcal{S}$ de funciones definidas en un conjunto* B *es llamada* ***uniformemente equicontinua*** *en* B, *si para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta > 0$ *tal que* $|f(\zeta) - f(\xi)| < \varepsilon$ *para toda* f *en* $\mathcal{S}$, *siempre que* ζ *y* ξ *estén en* B, *y* $|\zeta - \xi| < \delta$.

Esto es, para cada $\varepsilon > 0$, la misma δ funciona para todas las funciones en la familia $\mathcal{S}$, y en todo el conjunto B.

Demuestre: Si $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *es una sucesión de funciones analíticas en una región* G, *que es uniformemente acotada en los discos cerrados de* G, *entonces, esta familia de funciones es uniformemente equicontinua en todo disco cerrado de* G.

Solución. Sea B un disco cerrado en G. Por el último ejemplo, existe un número $M(B)$ tal que $|f_n'(z)| \leq M(B)$ para cada n y para toda z en B. Sea γ una línea recta de ζ a ξ en B. Ya que la línea recta está contenida en B, tenemos $|f_n(\zeta) - f_n(\xi)| = |\int_\gamma f_n'(z)\, dz| \leq \int_\gamma |f_n'(z)|\, |dz| \leq M(B)\, |\zeta - \xi|$. Así, dada $\varepsilon > 0$, podemos satisfacer la definición de equicontinuidad uniforme en B haciendo $\delta = \varepsilon/M(B)$.