

# Seminario de Resolución de Problemas

## Hints Lista 9

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval  
José Antonio Gómez Ortega

### Sugerencias

1. Para encontrar el mínimo y demostrarlo usa la desigualdad del triángulo.
2. Este problema no es sencillo. Tienes que usar la expansión en serie de potencias de  $\log(1-x)$ .
3. Usa el Teorema del Valor Intermedio para encontrar una  $x_0$  tal que  $f(x_0) = 1$ . Trabajando con esta puedes encontrar lo que te piden.
4. Este problema no es sencillo. Tienes que construir una función usando series de potencias.
5. Para tener el problema correcto, basta hacer la primer parte. Para hacerla, necesitas dos ecuaciones, una para  $n = 1$  y una para  $n = 2$ . Recuerda que este tipo de integrales se hacen por partes. Tendrás un sistema de ecuaciones de dos variables ( $a$  y  $b$ ). Si quieres hacer la segunda parte, necesitarás usar varios trucos de cálculo. Desempolva el Spivak y busca teoremas de valor medio para integrales.
6. Usa la simetría.
7. Usa cambios de variables y recuerda cómo cambian los límites de integración. Si  $f$  es creciente y  $x, t \in [0, 1]$ , entonces  $f(x) > f(tx)$ . Recuerda también que el operador integrar es monótono.
8. Para la parte  $a$  muestra que si  $t > 0$ , entonces

$$\frac{1}{t^2 + t(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{t^2 + t(a+b) + ab} \leq \frac{1}{t^2 + 2t\sqrt{ab} + ab}.$$

Integra estas desigualdades de 0 a  $\infty$ .

Para la segunda parte, usa el inciso  $a$ ) con números específicos.

9. Intenta entender qué quiere decir esta desigualdad geoméricamente.
10. Las funciones que sirven como contraejemplo no pueden ser siempre continuas, pero tampoco pueden tener hoyos en su imagen. Piensa en cosas trigonométricas o investiga la función 13 de Conway para construir tu contraejemplo.
11. Recuerda resultados de cálculo para trabajar con desigualdades y con integrales.

12. Escribe  $x^t Ax$  en términos de una suma. Intenta poner esta suma como una integral que involucre a algo exponencial. Es útil recordar el valor de la integral  $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$  para  $\lambda > 0$ . Usa teoremas de cambio de orden de integración con suma. Para la parte de la igualdad, usa la independencia lineal de funciones exponenciales.