Seminario de Resolución de Problemas
Lista 5

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"The only way to succeed is to keep your courage and patience, and to work energetically"
Vicent van Gogh

La tarea de esta ocasión es más difícil. Esta entrega será realizada por parejas. Si un integrante escribe x problemas y el otro y problemas, la calificación será $\min(x+y, 2\min(x,y)+1$, así que repártanse el trabajo equitativamente. Es obligatorio tener una pareja, si hay más de una tarea individual, se anulará.

El equipo que más problemas entregue y cada equipo que entregue 9 o más problemas, tendrá un punto extra en la tarea que quiera.

Recuerden que auqnue la tarea se entregue por parejas, eso no evita que trabajen en equipo con más personas. Recuerden también que pueden consultar el material y las personas que quieran.

Tarea

1. Las entradas de un arreglo de 9×9 son todos los núemeros de 1 a 81 en algún orden. Muestra que existe un k en $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tal que el producto de los números en el renglón k es distinto al producto de los números en la columna k.

2. Encuentra todas las matrices A de 2×2 de modo que $A^T = A^{-1}$.

3. Muestra que en 2011 enteros consecutivos siempre hay 2010 de ellos cuya suma es múltiplo de 2010.

4. Sean a, b y c tres números enteros en progresión aritmética. Muestra que $a^2 + b^2 + c^2$ no es un cuadrado perfecto.

5. Para cada entero $n \geq 3$, muestra que existe a y enteros positivos a_1, a_2, ..., a_n tales que:

$$a^3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$$

6. Para cada entero positivo n sea u_n el primo más grande que sea menor o igua la n y v_n el primo más pequeño que sea mayor que n. Muestra que:

$$\frac{1}{u_2 v_2} + \frac{1}{u_3 v_3} + \cdots + \frac{1}{u_{2010} v_{2010}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2011}$$

7. En un torneo de Bridge con 110 equipos en cada ronda hay 55 partidos (en un partido se enfrentan 2 equipos). Hay 6 rondas. Cada equipo juega una vez por ronda y nunca juega contra un equipo más de una vez. Muestra que hay 19 equipos tales que ningunos dos de ellos se enfrentaron entre sí.

8. Se tienen a_1, a_2, $\ldots$, a_n enteros no negativos y A_n su media aritmética. Demuestra que:

$$a_1!a_2!\ldots a_n! \geq (\lfloor A_n \rfloor)^n.$$

9. Encuentra todos los enteros positivos n tales que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2$ divide a $n-4$ y $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2$ divide a $n+4$.

10. Un punto en el plano es un *punto mixto* si una de sus entradas es racional y la otra es irracional. Encuentra todos los polinomios con coeficientes reales tales que sus gráficas no tienen ningún punto mixto.

11. En una competencia, 8 jueces califican a los participantes con sí o no. Después de la competencia, se observa que para cualquier par de participantes, dos jueces han calificado al primero sí y al segundo sí;, otros dos jueces han calificado al primero sí y al segundo no, otros dos jueces han calificado al primero no y al segundo sí; y otros dos jueces han calificado al primero no y al segundo no. ¿Cuál es el mayor número posible de participantes en tal competencia?

12. Muestra que si tres reales positivos suman 3, entonces la suma de los recíprocos de sus cuadrados es mayor o igual a la suma de sus cuadrados.