Seminario de Resolución de Problemas
Lista 3

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

*"Siempre substituye mentalmente las definiciones
en el lugar de las cosas definidas "
Blaise Pascal*

Tarea

1. Acomoda los números de 1 a 10 en los vértices de un decágono regular de modo que la suma de cualesquiera dos números adyacentes sea igual a la suma de los dos números adyacentes opuestos. ¿Es única la solución?

2. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la desigualdad $|x| + |y| < 100$?

3. Se tienen dos postes de teléfono, uno de altura a y otro de altura b. Se cuelgan dos cables, cada uno va de la parte superior de un poste a la base del otro. Los cables se intersectan en un punto P. ¿A qué altura está P?

4. En una caja hay pelotas blancas y negras. El 48% de las pelotas son blancas. Al meter 5 pelotas negras y 20 blancas, ahora el 36% son negras. ¿Cuántas pelotas blancas eran originalmente?

5. Un coche viaja a x kilómetros por hora durante un kilómetro y luego a y kilómetros por hora durante 5 kilómetros. ¿Cuál es la velocidad promedio que tuvo el coche?

6. Sean x y y reales positivos y $p \neq 0$. La $p-$media de x y y se define por:

$$M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Si $p < q$, muestra que:

$$M_p(x,y) \leq M_q(x,y)$$

   Observa qué te dice en particular para $p = -1$ y $q = 1$. Encuentra además $\lim_{p\to 0} M_p(x,y)$.

7. ¿De cuántas formas se puede escribir al entero positivo n como suma de algunos enteros positivos en donde sí importa el orden (por ejemplo, para 3 las formas son 3, $2+1$, $1+2$ y $1+1+1$)?

8. Sea n un entero mayor a 3. Muestra que es posible dividir un cuadrado en $n^2 + 1$ o más rectángulos ajenos y con lados paralelos a los del cuadrado de modo que cualquier línea paralela a uno de los lados intersecte a lo más el interior de n rectángulos.

9. Sea F_n el $n-$ésimo número de Fibonacci y p un primo distinto de 5. Muestra que F_{p-1} ó F_{p+1} es divisible entre p. ¿Cuándo pasa cada una de estas cosas?

10. En un cuadrado hay un punto P tal que $PA = 6$, $PB = 7$ y $PC = 8$.

    - Encuentra la longitud de PD.
    - Encuentra la longitud del lado del cuadrado.

11. Si f es una función real conínua y estrictamente creciente en el intervalo $[0, 1]$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, demuestra que:

$$f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{9}{10}\right) + f^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) + f^{-1}\left(\frac{2}{10}\right) + \cdots + f^{-1}\left(\frac{9}{10}\right) \leq \frac{99}{10}.$$

12. $\star$ Las tangentes al circuncírculo del triángulo ABC en B y C se cortan en M. La línea por M paralela a AB corta al circuncírculo en D y E e intersecta a AC en F. Prueba que F es el punto medio de DE.