

# Seminario de Resolución de Problemas

## Lista 2

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval  
José Antonio Gómez Ortega

*“Todos los problemas tienen un ritmo, ves.  
Es igual que la música.”  
Yoko Ogawa*

### Tarea

1. ¿Cuántas veces al día se cruzan las manecillas de un reloj?
2.
  - Toma 1000 puntos en el plano. ¿Siempre existe una recta que deja 500 de un lado y 500 de otro?
  - Toma 1000 puntos en el plano, 500 de ellos rojos y 500 de ellos azules. No hay tres puntos colineales. Demuestra que existe una recta que deja 250 puntos rojos y puntos azules de cada lado.
  - ¿Pasa lo mismo con puntos de tres colores?
3. Los números de Fibonacci están definidos por  $F_1 = F_2 = 1$  y  $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$  para  $n \geq 0$ .
  - Encuentra el valor de  $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}$ .
  - Expresa la suma  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  en términos de un número de Fibonacci.
4. ¿Cuál es la suma de todas las sumas de dígitos de los números de uno a un millón?
5. Un sombrero tiene  $n$  pelotas, algunas de ellas rojas y algunas de ellas negras. Se eligen, sin remplazo, cinco de ellas. Se sabe que la probabilidad de que las cinco sean rojas es  $\frac{1}{2}$ . ¿Cuál es el menor valor posible que puede tener  $n$ ? Intenta dar un argumento simple que no involucre factoriales o coeficientes binomiales.
6. Dados  $n + 2$  números cualquiera, muestra que siempre hay dos cuya suma o cuya diferencia es divisible entre  $2n$ .
7. Sea  $d$  un divisor de un entero de la forma  $n^2 + 1$ . Muestra que  $d - 3$  no es divisible entre 4.
8. Toma una pizza de queso y un real  $r$ . Se corta una rebanada con un ángulo de  $r$ (radianes), se voltea, de modo que el queso quede hacia abajo, y se regresa a la pizza. Luego, con el mismo ángulo, se corta la rebanada adyacente en sentido horario. También se voltea y se regresa. Se sigue haciendo este proceso, continuando siempre en sentido horario. Determina si siempre se puede llegar otra vez a tener todo el queso arriba tras un número finito de pasos.

9. En un cuadrado  $ABCD$  los puntos medios de  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  son  $K$ ,  $L$ ,  $M$  y  $N$  respectivamente. Al trazar los segmentos  $KC$ ,  $LD$ ,  $MA$  y  $NB$  se forma otro cuadrado en el centro. Encuentra la razón de las áreas de ambos cuadrados.
10. Se construye una sucesión similar a la de los números de Fibonacci, pero los primeros dos términos, en vez de ser 1 y 1 son enteros  $a$  y  $b$  que no tienen factores en común. ¿Será posible que todos los números en esta sucesión sean compuestos?
11. Sea  $p$  un primo congruente a 1 módulo 4. Demuestra que  $\sum_{i=1}^{(p-1)/4} \lfloor \sqrt{ip} \rfloor = \frac{p^2-1}{12}$ .
12.
  - Se tiene una circunferencia y su centro  $O$ , una línea  $l$  y un punto  $p$ . Construye usando sólo regla la perpendicular a  $l$  que pasa por  $P$ .
  - ★ Se tiene una elipse, su centro  $O$  y uno de sus focos  $F$ , una línea  $l$  y un punto  $P$ . Construye usando sólo regla la perpendicular a  $l$  que pasa por  $P$ .

El salto de las “respuestas cortas” a las respuestas “tipo olimpiada” es grande. Aquí hay algunos trucos que pueden ser útiles para los estudiantes que están en este camino:

- Practica, practica, practica. El único modo de aprender matemáticas es haciendo.
- Las demostraciones son ensayos. Cuanto mejor escribas una demostración, más comprensible será para quien la lee. Incluso las cuestiones mundanas como la gramática, la ortografía y la legibilidad de la escritura merecen algo de atención.
- Define tus términos. Si vas a utilizar una palabra de manera que pueda no ser clara, defínela con precisión. Entonces, apégate a tu definición.
- Lee a los grandes olímpicos. Nadie ha aprendido jamás a hacer buenas matemáticas desde la nada. Cuando practiques problemas, lee incluso las soluciones de los que hayas resuelto.
- Hay más de un camino. Dos soluciones distintas pueden ser igualmente válidas. Aún cuando las soluciones sean semejantes en el contenido, las diferencias en la forma de abordarlas pueden ser significativas y valiosas.
- No se acaba aún cuando se acaba.
- No dudes en continuar pensando sobre los problemas del concurso una vez que ha terminado el tiempo, discute los problemas con otras personas.
- Aprende de tus compañeros. Son más listos de lo que podrías pensar.
- Aprende del pasado. Intenta relacionar los problemas nuevos con los viejos; puedes aprender algo sobre las semejanzas o sobre las diferencias.
- **Paciencia.** ¡Nadie ha dicho que esto es fácil!

**Kiran S. Kedlaya**