Seminario de Resolución de Problemas
Lista 14: Álgebra lineal y Geometría

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"La única forma de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas."

Tarea

1. La matriz A es de 2×2, tiene entradas reales y cumple $A^4 = I$. Encuentra todos los posibles valores de A^2.

2. Para cada número natural de cuatro dígitos $n = \overline{abcd}$ (con $a \neq 0$), se define $k(n) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Determina el valor de
$$\sum_{n=1000}^{9999} k(n).$$

3. Las matrices A, B y C son de $n \times n$ y cumplen $ABC + AB + BC + AC + A + B + C = 0$. Muestra que A conmunta con $B + C$ si y sólo si A conmuta con BC.

4. ¿Cuál es el área de un heptágono regular de lado 2007?

5. Una recta pasa por un vértice de un triángulo no degenerado y corta a este triángulo en dos triángulos semejantes en razón $\sqrt{3}$. Encuentra los ángulos del triángulo original.

6. Encuentra el radio de la esfera más grande que cabe en un cono con altura 15 y base de diámetro 16.

7. Sea H el conjunto de las matrices de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{N}$. Sea P el conjunto de las matrices de H cuya suma de elementos en cada fila y columna es 1.
    - Si $A \in P$, muestra que $\det A = \pm 1$.
    - Si A_1, A_2, $\ldots$, A_n están en H y su producto está en P, muestra que A_1, A_2, $\ldots$, A_n están en P.

8. Pinto, el perro y Silvestre, el gato, juegan a llenar las entradas de una matriz de $n \times n$ para un entero n par. Alternadamente, empezando por Pinto, cada quien en su turno coloca un real en una entrada que aún no haya sido ocupada. Pinto gana si al llenarse la matriz se obtiene una matriz invertible. Silvestre gana en otro caso. ¿Qué jugador puede garantizar la victoria?

9. Encuenta el determinante de la matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times n$, en donde

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

10. Sea C la curva $\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

    - Demuestra que no existen 4 puntos coplanares en C.
    - Demuestra que no existen 5 puntos K, L, M, N y O en C tales que K queda dentro del tetraedro $LMNO$.

11. Se tienen n puntos P_1, P_2, $\ldots$, P_n en $\mathbb{R}^2$ con norma menor o igual a 1. Muestra que existe un punto P de norma 1 en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} ||P - P_i||}{n} \geq 1.$$

12. Sea ABC un triángulo de circuncírculo Γ e incentro I. Considera un punto P en BC. Hay dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 tales que son tangentes a AP, a BC y a Γ. Sean O_1 y O_2 sus centros respectivamente. Muestra que I, O_1 y O_2 son colineales.