Seminario de Resolución de Problemas
Lista 10: Álgebra

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
José Antonio Gómez Ortega

"Problems, problems, problems all day long.
Will my problems work out right or wrong?"
The Everly Brothers

Tarea

1. Encuentra el valor de $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^n}+1)$.

2. Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ de modo que hay una infinidad de valores enteros a para los cuales $f(a)$ es primo. Muestra que f es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.

3. Sea S un conjunto y $\bullet$ una operación binaria en S que satisface lo siguiente para todas x y y en S:

$$\begin{aligned} x \bullet (x \bullet y) &= y \\ (y \bullet x) \bullet x &= y. \end{aligned}$$

   Muestra que $x \bullet y = y \bullet x$ para todas x y y en S.

4. Se tienen tres números complejos a, b y c que satisfacen

$$\begin{aligned} a+b+c &= 12 \\ a^2+b^2+c^2 &= 50 \\ a^3+b^3+c^3 &= 216. \end{aligned}$$

   Encuentra el valor de $a^4+b^4+c^4$.

5. El maestro pidió a sus alumnos que encontraran las raíces de un polinomio cuadrático mónico con raíces reales. Juan copió mal el coeficiente libre y obtuvo como raíces a los reales $a > 1$ y $b > 1$. Pedro copió mal el coeficiente de x y obtuvo como raíces a a^2 y b^2. Muestra que alguno de los dos, además de copiar mal la ecuación, resolvió mal la ecuación que copió.

6. Sea S un conjunto con 3 elementos. Se elige, de entre las funciones $f : S \times S \to S$, una de ellas aleatoria y uniformemente. ¿Cuál es la probabilidad de que esa función determine una operación de grupo en S?

7. Sea m un número que termina en 5. Muestra que $1991 | 12^m + 9^m + 8^m + 6^m$.

8. Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ y a y b dos enteros distintos con $\gcd(f(a), f(b)) = 1$. Muestra que existe una infinidad de enteros de modo que sus valores en f son primos relativos por parejas.

9.
   - Si X y Y son subconjuntos no vacíos de un grupo finito $(G, +)$ con $|X| + |Y| > |G|$, muestra que $G = X + Y := \{x + y \,|\, x \in X, y \in Y\}$.
   - Si X y Y son subconjuntos no vacíos de un grupo finito $(G, +)$ con $|X| + |Y| = |G|$, y a no se puede escribir como $a = x + y$ con $x \in X$ y $y \in Y$, entonces tampoco se puede escribir como $a = x + y$ con $x \in G \setminus X$ y $y \in G \setminus Y$.

10. Encuentra todos los $f \in \mathbb{Z}[x]$ de grado $n \geq 6$ para los cuales existen a_1, a_2, $\ldots$, a_n enteros distintos con $f(a_i)^2 = 1$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$.

11. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| < 1$. Sean n y k enteros positivos. Muestra que todas las raíces (quizás complejas) de $x^n + \alpha x^{n-k} + \alpha x^k + 1$ tienen norma 1.

12. $\star$ Para un número q con $|q| < 1$ y una $x \neq 0$ demuestra la siguiente identidad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + xq^n)(1 + x^{-1}q^{n-1}).$$